

Ненад Вилендечић  
Владан Јагузовић  
Милица Јагузовић  
Миа Јотановић  
Сара Кољанчић

**Збирка урађених задатака са пријемних испита  
из математике одржаних на  
Природно-математичком факултету у Бањој  
Луци од 2016. до 2024. године**

Природно-математички факултет, Бања Лука, 2024. године

Аутори: Ненад Вилендечић, ПМФ Бања Лука  
Владан Јагузовић, ПМФ Бања Лука  
Милица Јагузовић, ПМФ Бања Лука  
Миа Јотановић, ПМФ Бања Лука  
Сара Кољанчић, ПМФ Бања Лука

Рецензенти: др Бојан Николић, ПМФ Бања Лука  
др Борис Петковић, ПМФ Бања Лука

Издавач: Природно-математички факултет, Бања Лука

Обрада текста и слика: Аутори  
Слика на корицама: freepik.com

CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна и универзитетска библиотека  
Републике Српске, Бања Лука

51(079.1)

ЗБИРКА урађених задатака са пријемних испита из математике на Природно-математичком факултету у Бањој Луци од 2016. до 2024. године / Ненад Вилендечић ... [и др.]. - Бања Лука : Природно-математички факултет, 2024 (Бања Лука : Бина). - IV, 112 стр. : граф. прикази ; 25 cm

Тираж 100.

ISBN 978-99976-86-26-8

COBISS.RS-ID 141614337

## Предговор

Ова збирка представља наставак збирке у којој су обједињени и израђени задаци са пријемних испита из математике на Студијском програму за математику и информатику Природно-математичког факултета у Бањој Луци, у периоду од 2000. до 2015. године. Настала је са једноставним циљем да се обухвате и сви пријемни испити који су одржани од 2016. године до дана њеног издавања. Збирка обухвата укупно 20 пријемних испита са детаљно урађеним задацима. Збирка је првенствено намијењена будућим студентима математике и информатике на Природно-математичком факултету у Бањој Луци, али може и да послужи сваком будућем студенту којем ће математика бити саставни дио квалификационог испита.

Захваљујемо се рецензентима др Бојану Николићу, доценту Природно-математичког факултета у Бањој Луци и др Борису Петковићу, доценту Природно-математичког факултета у Бањој Луци на свим сугестијама и коментарима који су значајно допринијели квалитету ове збирке.

Бања Лука, октобар 2024. године  
Аутори.

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

# Садржај

Предговор . . . . .	i
Јун 2016. . . . .	1
Август 2016. . . . .	7
Септембар 2016. . . . .	13
Јун 2017. . . . .	19
Септембар 1 2017. . . . .	25
Септембар 2 2017. . . . .	31
Јул 2018. . . . .	35
Септембар 2018. . . . .	45
Јул 2019. . . . .	51
Септембар 2019. . . . .	57
Јун 2020. . . . .	63
Септембар 2020. . . . .	69
Јун 2021. . . . .	75
Септембар 2021. . . . .	81
Јун 2022. . . . .	87
Септембар 2022. . . . .	91
Јун 2023. . . . .	95
Септембар 2023. . . . .	99
Јул 2024. . . . .	103
Септембар 2024. . . . .	109

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

## Јун 2016.

## Задаци

1. Израчунати вриједност израза

$$\frac{2a^2 + 7a + 3}{a^3 - 1} - \frac{1 - 2a}{a^2 + a + 1} - \frac{3}{a - 1}$$

за  $a = -\frac{1}{3}$ .

2. Ако је  $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x^2$ ,  $x \neq -1$ , чему је једнако  $f(-x)$ ?
3. У фабрици су 35% радника жене, а мушких радника има за 252 више него женских радника. Израчунати укупан број радника фабрике.
4. Ријешити експоненцијалну једначину  $3 \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0$ .
5. Нека су  $x_1$  и  $x_2$  рјешења квадратне једначине  $mx^2 - (m+2)x + 2 = 0$ , гдје је  $m \neq 0$  реалан параметар. Одредити скуп вриједности параметра  $m$  за које вриједи  $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} > 3$ .
6. Дужине страница правоуглог троугла чине три узастопна члана аритметичког низа са разликом 2. Одредити дужину веће катете овог правоуглог троугла.
7. Израчунати број непарних троцифрених бројева чије су све цифре различите.
8. Два пречника круга леже на правама чије су једначине  $x + y - 14 = 0$  и  $2x - 3y + 12 = 0$ . Ако кружница која одговара том кругу садржи координатни почетак, одредити једначину кружнице.
9. Одредити број рјешења једначине  $\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$  која припадају интервалу  $[-\pi, \pi]$ .
10. Нека је  $i$  имагинарна јединица и  $z = 1 + i$ . Израчунати имагинарни дио комплексног броја  $\frac{z^2 + \bar{z}}{1-z}$ .

## Рјешења

1. Свођењем датог израза на један разломак, при чему користимо једнакост  $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$ , добијамо

$$\begin{aligned} & \frac{2a^2 + 7a + 3}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} - \frac{1 - 2a}{a^2 + a + 1} - \frac{3}{a - 1} \\ &= \frac{2a^2 + 7a + 3 - (a - 1)(1 - 2a) - 3(a^2 + a + 1)}{(a - 1)(a^2 + a + 1)}, \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Сређивањем израза изнад разломачке црте добијамо

$$\begin{aligned} & \frac{2a^2 + 7a + 3 - (a - 2a^2 - 1 + 2a) - 3a^2 - 3a - 3}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} \\ &= \frac{2a^2 + 7a + 3 - a + 2a^2 + 1 - 2a - 3a^2 - 3a - 3}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} \\ &= \frac{a^2 + a + 1}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} = \frac{1}{a - 1}. \end{aligned}$$

Уврштавањем вриједности  $a = -\frac{1}{3}$  добијамо да је вриједност израза једнака  $\frac{1}{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{3}{4}$ .

2. Нека је  $\frac{x-2}{x+1} = t$ . Из претходне једнакости добијамо да је  $x - 2 = t(x + 1)$ , из чега даље добијамо  $x(1 - t) = t + 2$ , што нам даје

$$x = \frac{t + 2}{1 - t}, t \neq 1.$$

Замјеном добијеног израза у једнакост  $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x^2$  добијамо

$$f(t) = \left(\frac{t + 2}{1 - t}\right)^2 = \frac{(t + 2)^2}{(1 - t)^2}, t \neq 1.$$

Из тога закључујемо да је

$$f(x) = \frac{(x + 2)^2}{(1 - x)^2}, x \neq 1.$$

Уврштавајући  $-x$  у претходном изразу добијамо да је

$$f(-x) = \frac{(-x + 2)^2}{(1 - (-x))^2} = \frac{(2 - x)^2}{(1 + x)^2}, x \neq -1.$$

3. Ако са  $x$  означимо број радника фабрике, тада из услова задатка имамо да је број женских радника  $35\%x$  односно  $0,35x$ . Број мушких радника фабрике је  $35\%x + 252 = 0,35x + 252$ . Укупан број радника у фабрици је једнак збиру броја мушких и броја женских радника у фабрици. Стога имамо да је  $x = 0,35x + (0,35x + 252)$ . Сређивањем датог израза добијамо  $0,3x = 252$ , из чега слиједи да је  $x = \frac{10}{3} \cdot 252 = 840$ .

4. Како је  $3 \cdot 9 \cdot 9^x - 6 \cdot 3^x - 1 = 27(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 1$  дата једначина се своди на

$$27(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 1 = 0.$$

Ако непознати број  $3^x$  означимо са  $t$ , добијамо да број  $t$  мора задовољавати једначину

$$27t^2 - 6t - 1 = 0.$$

Рјешавањем претходне квадратне једначине закључујемо да број  $t$  мора бити један од бројева:  $t_1 = -\frac{1}{9}$  или  $t_2 = \frac{1}{3}$ . Дакле, да би непознати број  $3^x$  задовољио дату једначину мора да буде једнак  $-\frac{1}{9}$  или  $\frac{1}{3}$ . Како је за свако  $x \in \mathbb{R}$  број  $3^x$  позитиван, то он не може бити једнак  $-\frac{1}{9}$ . Стога, једина могућност је да тај број буде једнак  $\frac{1}{3}$ . Рјешавањем једначине  $3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1}$  добијамо да је  $x = -1$  једино рјешење дате једначине.

5. Ако су  $x_1$  и  $x_2$  рјешења посматране квадратне једначине, користећи Вијетове формуле, добијамо да вриједи

$$x_1 x_2 = \frac{2}{m} \quad \text{и} \quad x_1 + x_2 = \frac{m+2}{m}.$$

Уврштавајући претходно добијене једнакости у дату неједнакост  $\frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} > 3$  добијамо

$$\frac{\frac{m+2}{m}}{\frac{2}{m}} = \frac{m+2}{2} > 3,$$

одакле је  $m+2 > 6$ , тј.  $m > 4$ .

6. Означимо са  $a$  дужину најмање стране у датом троуглу. Из услова задатка имамо да су стране троугла дужина:  $a$ ,  $a+2$  и  $(a+2)+2 = a+4$ . Како је дати троугао правоугли, то се на њега може примијенити Питагорина теорема, па је

$$(a+4)^2 = a^2 + (a+2)^2.$$

Користећи формулу за квадрат збира добијамо  $a^2 + 8a + 16 = a^2 + a^2 + 4a + 4$ . Претходна једнакост се своди на

$$a^2 - 4a - 12 = 0.$$

Рјешавајући квадратну једначину добијамо да је  $a = 6$  или  $a = -2$ . Број  $a$  представља дужину катете, па због тога не може бити негативан. Закључујемо да је  $a = 6$ . Већа од катета има дужину  $a+2 = 8$ .

7. *Први начин.* Сваки непаран број се завршава једном од пет цифара: 1, 3, 5, 7 или 9. Посматрајмо бројеве који завршавају цифром 1. То су бројеви облика

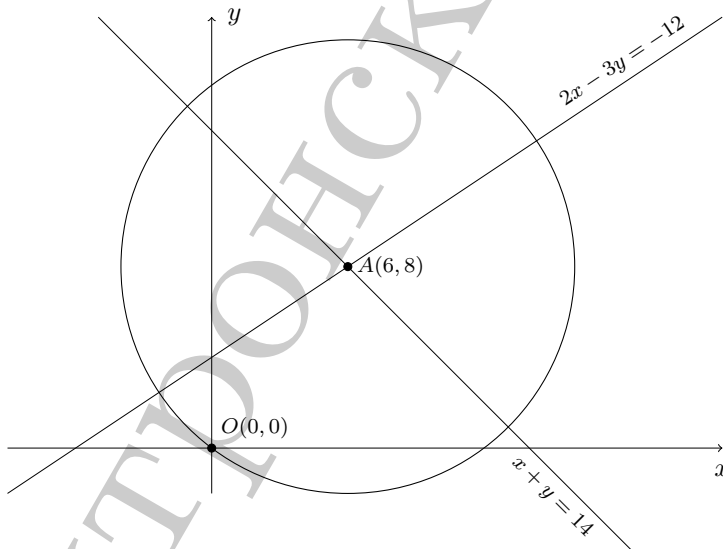
$$\overline{xy1},$$

гдје  $x$  и  $y$  представљају цифре које су међусобно различите и од којих ниједна није једнака 1. Према томе, троцифрених бројева са различитим цифрама који завршавају цифром један има онолико колико има двоцифрених бројева са различитим цифрама при чему ниједна од цифара није једнака 1. Двоцифрених бројева има 90. Двоцифрених бројева са истовјетним цифрама има 9, при чему смо у тим бројевима рачунали и број 11. Двоцифрених бројева који имају

једну цифру једнаку 1 има 17. Дакле, двоцифрених бројева са различитим цифрама - при чему ниједна цифра није једнака 1 - има  $90 - 9 - 17 = 64$ . Закључак претходне дискусије је да троцифрених бројева који имају различите цифре и завршавају са бројем 1 има 64. Ако у претходном разматрању замијенимо последњу цифру са другом непарном цифром, имамо исту дискусију. Како има пет могућности за избор последње цифре, тражени број бројева је  $5 \cdot 64 = 320$ .

**Други начин.** Сваки непаран број се завршава једном од пет цифара: 1, 3, 5, 7 или 9. Због тога, цифра која се налази на последњем мјесту мора да буде непарна, а таквих имамо 5. На првом мјесту стављамо једну цифру из скупа  $\{1, 2, \dots, 9\}$  при чему на том мјесту не може да буде цифра коју смо ставили на последње мјесто. То нам даје укупно 8 могућности за избор прве цифре. На другом мјесту стављамо цифру из скупа  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$  при чему се не смије узети цифра која је стављена на прво или последње мјесто. Према томе, постоји 8 цифара које би се могле ставити на друго мјесто. Користећи принцип производа имамо да је број непарних троцифрених бројева са различитим цифрама једнак  $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$ .

8. Пречник круга је дуж која спаја двије тачке на кружници и при томе садржи центар кружнице. Како се пречници дате кружнице налазе на правима чије су једначине:  $x + y - 14 = 0$  и  $2x - 3y + 12 = 0$  и како ти пречници садрже центар кружнице, то се центар кружнице мора наћи на пресеку датих правих. Означимо тачку пресека са  $A$  (Слика 1).



Слика 1: Задатак 8.

Тачку пресека датих правих добијамо рјешавањем система једначина

$$\begin{aligned}x + y &= 14, \\2x - 3y &= -12.\end{aligned}$$

Ако помножимо прву једначину са 3 и додамо је другој добијамо да је  $5x =$

$3 \cdot 14 - 12 = 30$ , из чега закључујемо да је  $x = 6$ . Из прве једначине, замјеном  $x = 6$ , добијамо да је  $y = 8$ . Дакле, тачка  $A(6, 8)$  је центар круга, из чега закључујемо да је једначина кружнице

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = r^2,$$

при чему је  $r$  још увијек непозната дужина полупречника кружнице. У тексту задатка је дато да тачка  $(0, 0)$  припада кружници, из чега се добија да је

$$r^2 = (0 - 6)^2 + (0 - 8)^2 = 36 + 64 = 100.$$

Стога, тражена кружница има једначину

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100.$$

### 9. Користећи адисиону формулу

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

добијамо

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \sin x.$$

Због претходне једнакости полазна једначина добија облик

$$\sin 2x + \sin x = 0.$$

Користећи формулу за претварање збира синуса у производ, тј.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

добијамо да је  $\sin 2x + \sin x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$  након чега дата једначина има облик

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Производ бројева је једнак нули ако и само ако је бар један од тих бројева једнак нули. Рјешења претходне једначине добијамо из једначина

$$\sin \frac{3x}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Из прве једначине добијамо да је  $\frac{3x}{2} = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , а из друге да је  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Дакле, рјешења дате једначине су

$$x_k = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{и} \quad x_l = \pi + 2l\pi, \quad \text{при чему } k, l \in \mathbb{Z}.$$

У првој формули за  $k \in \{-1, 0, 1\}$  добијамо  $-\frac{2\pi}{3}$ ,  $0$  и  $\frac{2\pi}{3}$ , што су једина рјешења за  $u$  интервалу  $[-\pi, \pi]$ . Из друге формуле добијамо да једино за  $l \in \{-1, 0\}$  добијамо рјешења у траженом интервалу и то  $-\pi$  и  $\pi$ . Из тога видимо да једначина има укупно 5 рјешења у датом интервалу.

10. Користећи формулу за збир квадрата и  $i^2 = -1$  добијамо да је

$$z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

Због тога имамо

$$\begin{aligned} \frac{z^2 + \bar{z}}{1 - z} &= \frac{2i + \overline{(1 + i)}}{1 - (1 + i)} = \frac{2i + 1 - i}{1 - 1 - i} = \frac{1 + i}{-i} \\ &= \frac{1 + i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i - 1}{i \cdot (-i)} = -1 + i. \end{aligned}$$

Дакле, имагинарни дио датог комплексног броја је једнак 1.

**Август 2016.****Задаци**

1. Израчунати вриједност израза

$$\left( \frac{4a^2}{4a^2 - 1} - \frac{4a^2}{4a^2 + 4a + 1} \right) : \frac{16a^2}{8a^3 - 1}$$

при чему је  $a = -\frac{1}{4}$ .

2. Одредити  $f(g(-2))$ , при чему је  $f(x) = x^3 - 3x$  и  $g(x) = \sin \frac{\pi x}{12}$ .
3. На писменој вјежби из математике ученицима су задана три задатка. При томе, 12% ученика није ријешило нити један задатак, 32% је ријешило један или два задатка, а 14 ученика је ријешило сва три задатка. Колико ученика је радило писмену вјежбу из математике?
4. Одредити збир рјешења логаритамске једначине

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 3) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3).$$

5. Одредити скуп вриједности реалног параметра  $m \neq 1$ , за које једначина  $(m - 1)x^2 - 2mx + 3 = 0$  има реална рјешења супротног знака.
6. Површина ромба је 24, а већа дијагонала ромба је за 2 дужа од краће дијагонале. Колики је обим тог ромба?
7. Природан број је палиндром ако остаје исти када се његове цифре напишу у обрнутом поретку, нпр. 16461. Колико има четвороцифрених палиндрома?
8. Одредити број рјешења тригонометријске једначине  $\sin 2x = \cos 4x$  на интервалу  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
9. Нека је  $i$  имагинарна јединица, а  $x$  и  $y$  реални бројеви за које важи  $(2 + 3i)x + (3 + 2i)y = 1$ . Израчунати  $x - y$ .
10. Одредити једначину тангенте повучене у тачки  $(-2, 1)$  на кружницу чија је једначина задата са  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$ .

## Рјешења

1. Користећи једнакост  $8a^3 - 1 = (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$  добијамо да вриједи

$$\begin{aligned} & \left( \frac{4a^2}{4a^2 - 1} - \frac{4a^2}{4a^2 + 4a + 1} \right) : \frac{16a^2}{8a^3 - 1} \\ &= \left( \frac{4a^2}{(2a - 1)(2a + 1)} - \frac{4a^2}{(2a + 1)^2} \right) : \frac{16a^2}{(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)} \\ &= \frac{4a^2(2a + 1) - 4a^2(2a - 1)}{(2a + 1)^2(2a - 1)} \cdot \frac{(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)}{16a^2} \\ &= \frac{8a^3 + 4a^2 - 8a^3 + 4a^2}{(2a + 1)^2} \cdot \frac{4a^2 + 2a + 1}{16a^2} \\ &= \frac{8a^2(4a^2 + 2a + 1)}{(2a + 1)^2 16a^2} \\ &= \frac{4a^2 + 2a + 1}{2(2a + 1)^2}, \quad a \neq \pm \frac{1}{2}, a \neq 0. \end{aligned}$$

Како је  $a = -\frac{1}{4}$ , то је

$$\frac{4a^2 + 2a + 1}{2(2a + 1)^2} = \frac{4 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + 1}{2 \cdot (1 - \frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1-2+4}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.$$

2. Да бисмо одредили  $f(g(-2))$ , најприје ћемо одредити вриједност  $g(-2)$ :

$$g(-2) = \sin\left(\frac{-2\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Једноставним уврштавањем добија се

$$f(g(-2)) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{8}.$$

3. Означимо са  $n$  укупан број ученика који су радили писмену вјежбу. Јасно је да је  $n$  једнак збиру броја ученика који су урадили сва три задатка, броја ученика који су урадили тачно један или тачно два задатка и броја ученика који нису урадили ниједан задатак.

Из задатка имамо да је број ученика који су урадили сва три задатка једнак 14, број ученика који су ријешили тачно један или тачно два задатка је  $32\%n = 0,32n$ , а број ученика који нису ријешили нити један задатак је  $12\%n = 0,12n$ . Слједи да је

$$14 + 0,12n + 0,32n = n \iff 14 = 0,56n \iff n = 25.$$

4. Посматрана једначина дефинисана је за све реалне вриједности  $x > 3$ , па само таква рјешења долазе у обзир. Користећи својства логаритамске функције

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b \text{ и } \log_a b^n = n \log_a b, \quad \text{за } a > 0, a \neq 1, b > 0, m \neq 0$$

дата једначина се може записати на следећи начин

$$\log_{2^{-\frac{1}{2}}}(x-3) = \log_{2^{-1}}(x+3)$$

што је еквивалентно са

$$-2\log_2(x-3) = -\log_2(x+3) \iff \log_2(x-3)^{-2} = \log_2(x+3)^{-1}.$$

Дакле, треба да ријешимо једначину

$$(x-3)^{-2} = (x+3)^{-1} \iff \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{x+3}.$$

Множећи посљедњу једнакост са  $(x-3)^2 \cdot (x+3)$ , при чему је  $(x-3)^2 \cdot (x+3) \neq 0$  добијамо

$$\begin{aligned} x+3 &= (x-3)^2 \iff x+3 = x^2 - 6x + 9 \iff x^2 - 7x + 6 = 0 \iff \\ &\iff (x-6)(x-1) = 0 \iff x = 6 \vee x = 1. \end{aligned}$$

Како само рјешење  $x = 6$  припада области дефинисаности  $(3, +\infty)$ , добијамо да је збир рјешења полазне једначине једнак 6.

**5.** Треба да одредимо вриједност реалног параметра  $m \neq 1$ , тако да једначина

$$(m-1)x^2 - 2mx + 3 = 0$$

има реална рјешења супротног знака. Другим ријечима, треба да одредимо  $m$ , под условом да је

$$D > 0 \text{ и } x_1x_2 < 0,$$

при чему је  $D$  дискриминанта посматране квадратне једначине. Користећи да је дискриминанта квадратне једначине  $ax^2 + bx + c = 0$  једнака  $b^2 - 4ac$ , слиједи да је

$$D > 0 \iff 4m^2 - 12(m-1) > 0 \iff 4m^2 - 12m + 12 > 0.$$

Множећи посљедњу неједнакост са  $\frac{1}{4}$ , добијамо неједначину по  $m$

$$m^2 - 3m + 3 > 0.$$

Дискриминанта квадратне једначине  $m^2 - 3m + 3 = 0$  је  $-3 < 0$ , а због коефицијента који стоји уз  $m^2$  и који је позитиван, слиједи да је функција

$$y = m^2 - 3m + 3$$

позитивна за сваку вриједност реалног параметра  $m$ , па су рјешења неједначине  $m^2 - 3m + 3 > 0$  сви реални бројеви  $m$ .

Користећи Вијетове формуле, услов  $x_1x_2 < 0$  еквивалентан је са

$$\frac{3}{m-1} < 0 \iff m-1 < 0 \iff m < 1 \iff m \in (-\infty, 1).$$

6. Ако са  $P$  означимо површину датог ромба, тада је

$$P = \frac{d_1 d_2}{2} = 24 \iff d_1 d_2 = 48,$$

при чему су  $d_1$  и  $d_2$  редом дужине његове дуже и краће дијагонале. Из текста задатка слиједи да је

$$d_1 = d_2 + 2.$$

Уврштавајући  $d_1$  из последње једнакости у једнакост  $d_1 d_2 = 48$ , добијамо

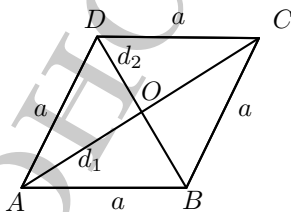
$$\begin{aligned} (d_2 + 2)d_2 = 48 &\iff d_2^2 + 2d_2 - 48 = 0 \iff \\ \iff (d_2 + 8)(d_2 - 6) = 0 &\iff d_2 = -8 \vee d_2 = 6. \end{aligned}$$

Како је  $d_2$  дужина дијагонале у посматраном ромбу, слиједи да је  $d_2 > 0$ , па је  $d_2 = 6$  једини могући случај и при томе је  $d_1 = 8$ .

Познато нам је да се дијагонале у ромбу полове под правим углом. Посматрајмо правоугли троугао  $AOB$  (Слика 2). Како је  $\frac{d_1}{2} = 4$ ,  $\frac{d_2}{2} = 3$ , то је

$$a^2 = 4^2 + 3^2 = 25,$$

одакле слиједи да је дужина странице посматраног ромба  $a = 5$ , па је његов обим  $O = 4a = 20$ .



Слика 2: Задатак 6.

7. Четвороцифрени палиндроми су бројеви облика  $\overline{abba}$ . За  $a$  можемо изабрати било коју цифру из скупа  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , јер  $a$  као прва цифра броја не смије бити једнака 0. За  $b$  можемо изабрати било коју цифру из скупа  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . На основу принципа производа слиједи да је укупан број четвороцифрених палиндрома

$$10 \cdot 9 = 90.$$

8. Како вриједи формула за косинус двоструког угла  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ , слиједи да је једначина из задатка еквивалентна једначини

$$\sin 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x.$$

Из основног тригонометријског идентитета је  $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x$ , па закључујемо да треба да вриједи

$$\sin 2x = 1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x.$$

Дакле, довољно је ријешити једначину

$$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$$

на интервалу  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Уводећи смјену  $\sin 2x = t$ , претходна једначина се своди на једначину

$$2t^2 + t - 1 = 0.$$

Рјешења ове квадратне једначине су

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

одакле су

$$t_1 = \frac{1}{2} \text{ и } t_2 = -1.$$

Стога, треба наћи рјешења једначина

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \text{ и } \sin 2x = -1$$

на интервалу  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Из прве једначине је

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

или

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \iff x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,$$

док је из друге једначине

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

при чему је  $k \in \mathbb{Z}$ . Уврштавајући вриједности за  $k$ , закључујемо да се у интервалу  $[0, \frac{\pi}{2}]$  налазе само 2 рјешења:  $\frac{\pi}{12}$  и  $\frac{5\pi}{12}$ .

**9.** Одредимо реалне бројеве  $x$  и  $y$  за које вриједи  $(2 + 3i)x + (3 + 2i)y = 1$  односно

$$2x + 3y + i(3x + 2y) = 1.$$

Два комплексна броја су једнака ако су им једнаки реални и имагинарни дијелови, одакле слиједи да је  $\operatorname{Re}(2x + 3y + i(3x + 2y)) = \operatorname{Re}(1)$  и да је  $\operatorname{Im}(2x + 3y + i(3x + 2y)) = \operatorname{Im}(1)$ . Дакле, вриједје једнакости

$$2x + 3y = 1,$$

$$3x + 2y = 0.$$

Тражене  $x$  и  $y$  добијамо као рјешења претходног система једначина. Множећи прву једначину са  $-3$ , а другу једначину са  $2$ , те сабирајући те двије једначине, добијамо нови систем једначина

$$2x + 3y = 1$$

$$-5y = -3.$$

Одатле је  $y = \frac{3}{5}$ , па је  $x = -\frac{2}{3}y = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{5}$ . Слиједи да је  $x - y = -1$ .

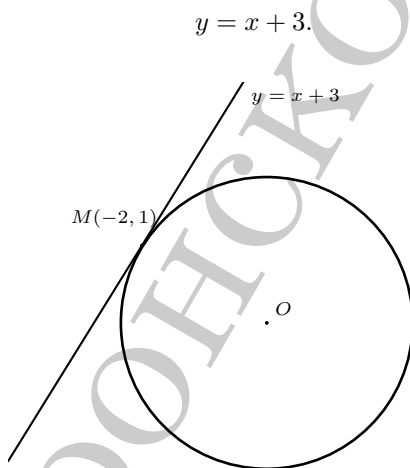
**10.** Једначину кружнице  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$  можемо записати у општем облику као  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 18$ . Једначина тангенте кроз тачку  $M(x_0, y_0)$  на кружницу чија је једначина у општем облику задата са  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$  је

$$(x - p)(x_0 - p) + (y - q)(y_0 - q) = r^2.$$

Одатле слиједи да је једначина тангенте кроз тачку  $M(-2, 1)$  на кружницу из задатка (Слика 3)

$$(x - 1)(-2 - 1) + (y + 2)(1 + 2) = 18,$$

тј.



Слика 3: Задатак 10.

## Септембар 2016.

## Задачи

1. Одредити вриједност израза  $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1}$ , ако је  $a = (1 + \sqrt{2})^{-1}$  и  $b = (1 - \sqrt{2})^{-1}$ .
2. Ако је  $f(x) = x^3 + 3x + 5$ , одредити  $f(-x - 1)$ .
3. Основа праве призме је правоугаоник чије су странице  $6\text{cm}$  и  $8\text{cm}$ . Висина призме је једнака дијагонали основе. Колика је запремина те призме?
4. Ријешити експоненцијалну једначину  $(\frac{3}{7})^x \cdot (\frac{49}{27})^x = \frac{49}{81}$ .
5. Нека су  $x_1$  и  $x_2$  рјешења квадратне једначине  $x^2 - 4x + 3(k - 1) = 0$ . Одредити вриједност реалног параметра  $k$ , за који важи  $x_1 - 3x_2 = 0$ .
6. У неком аритметичком низу први члан је 4, а осми члан је 25. Израчунати суму трећег и петог члана тог низа.
7. Колико се петоцифрених природних бројева може написати користећи цифре из скупа  $\{1, 2, 3\}$ , ако се цифра 2 појављује тачно два пута?
8. Одредити једначину праве  $p$  која пролази кроз тачку  $A(3, -7)$  и са координатним осама у трећем квадранту образује једнакокраки троугао.
9. Израчунати збир рјешења једначине  $\sin 2x + \cos x = 0$  која припадају интервалу  $[-\pi, \pi]$ .
10. Израчунати вриједност израза  $\left| \frac{1+z}{1-z} \right|$ , за  $z = 3i$ , при чему је  $i$  имагинарна јединица.

## Рјешења

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^{-1}} + \frac{1}{b^{-1}} &= a + b = (1 + \sqrt{2})^{-1} + (1 - \sqrt{2})^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{2}{1 - 2} = -2. \end{aligned}$$

2. Ако је  $f(x) = x^3 + 3x + 5$ , онда је  $f(-x - 1) = (-x - 1)^3 + 3(-x - 1) + 5$ .  
На основу формуле за куб бинома

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

имамо да је

$$(-x - 1)^3 = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1.$$

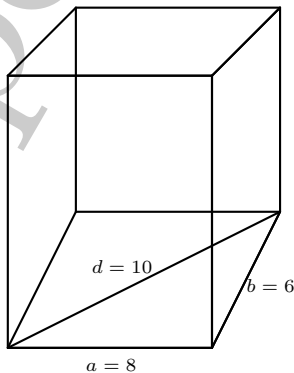
Из тога слиједи да је

$$f(-x - 1) = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1 - 3x - 3 + 5 = -x^3 - 3x^2 - 6x + 1.$$

3. Нека су странице правоугаоника у основи посматране призме  $a = 6 \text{ cm}$  и  $b = 8 \text{ cm}$  (Слика 4). Користећи Питагориноу теорему, дијагонала правоугаоника у основи призме је

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Како је висина посматране призме једнака добијеној дијагонали правоугаоника, то је  $H = 10 \text{ cm}$ . Користећи формулу за запремину призме  $V = B \cdot H$ , гдје је  $B$  површина базе те призме, добијамо да је тражена запремина  $V = B \cdot H = a \cdot b \cdot H = 480 \text{ cm}^3$ .



Слика 4: Задатак 3.

4. Како је

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{49}{27}\right)^x = \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{49}{27}\right)^x = \left(\frac{7}{9}\right)^x,$$

то се полазна једначина своди на једначину

$$\left(\frac{7}{9}\right)^x = \frac{49}{81} = \left(\frac{7}{9}\right)^2.$$

Одавде уочавамо да је  $x = 2$  рјешење полазне једначине.

5. Користећи Вијетове формуле у квадратној једначини  $x^2 - 4x + 3(k-1) = 0$ , добијамо да за њена рјешења  $x_1$  и  $x_2$  важи

$$x_1 + x_2 = 4.$$

Како треба да одредимо вриједност реалног параметра  $k$  за које важи

$$x_1 - 3x_2 = 0 \iff x_1 = 3x_2$$

видимо да вриједи

$$4x_2 = 4 \iff x_2 = 1.$$

Како је  $x_2$  рјешење полазне једначине, то вриједи

$$1 - 4 + 3(k-1) = 0 \iff 3(k-1) = 3 \iff k-1 = 1 \iff k = 2.$$

6. Нека је  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  дати аритметички низ и  $d$  његова разлика. Према условима датим у тексту задатка вриједи да је  $a_1 = 4$  и  $a_8 = 25$ . Како је  $a_8 = a_1 + 7d = 25$ , закључујемо да мора бити  $4 + 7d = 25$ , односно  $d = 3$ . С обзиром на то да је аритметички низ у потпуности дефинисан првим чланом тог низа  $a_1$  и разликом  $d$ , добија се да је сума трећег и петог члана посматраног аритметичког низа једнака

$$a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 8 + 18 = 26.$$

7. *Први начин.* С обзиром на то да нас интересују петоцифрени природни бројеви који у свом запису користе цифре из скупа  $\{1, 2, 3\}$ , а код којих се цифра 2 појављује тачно 2 пута, могући су случајеви гдје се цифра 2 јавља на:

- првом и другом, првом и трећем, првом и четвртном, првом и петом,
- другом и трећем, другом и четвртном, другом и петом,
- трећем и четвртном, трећем и петом,
- четвртном и петом мјесту.

То је укупно 10 различитих случајева, а за сваки од тих случајева може да се запише по 8 различитих петоцифрених бројева, чије су цифре из скупа  $\{1, 2, 3\}$ , нпр. у првом случају гдје се цифра 2 појављује као прва и друга цифра, ту се као трећа, четврта и пета цифра може појавити искључиво цифра 1 или 3, па имамо укупно  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  различитих бројева у том случају. Дакле, укупан број посматраних петоцифрених природних бројева је  $10 \cdot 8 = 80$ .

*Други начин.* Број избора двије позиције за цифру 2 у петоцифреном природном броју има исто колико и двочланих подскупова скупа са 5 елемената, тј.  $\binom{5}{2} = 10$ . На преостале три позиције у посматраном петоцифреном броју стоји или цифра 1 или цифра 3, па нас интересује колико има троцифрених бројева који у свом запису користе цифре из скупа  $\{1, 3\}$ . Принципом производа добија се да тих бројева има  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ , па се принципом суме добија да је укупан број петоцифрених природних бројева написаних користећи цифре из скупа  $\{1, 2, 3\}$  једнак  $10 \cdot 8 = 80$ .

8. Једначина праве  $p$  која пролази кроз тачку  $A(x_1, y_1)$  је

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

при чему је  $k$  коефицијент правца посматране праве, тј.  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , гдје је  $\alpha$  угао који гради дата права са позитивним смјером  $x$ -осе. Слједи да је једначина праве која пролази кроз тачку  $A(3, -7)$  облика  $y + 7 = k(x - 3)$ . Како дата права образује једнакокраки троугао са координатним осама у трећем квадранту, то су углови тог правоуглог троугла

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 90^\circ,$$

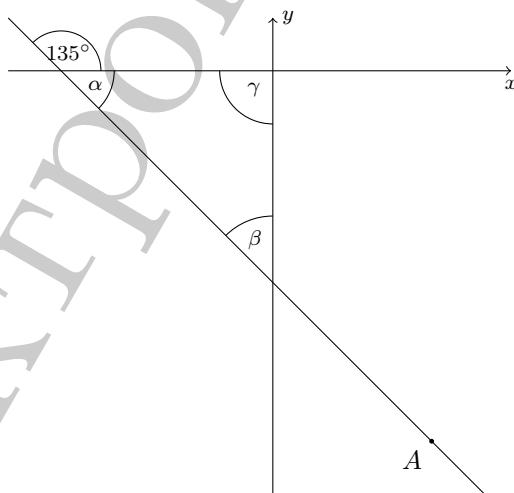
па очигледно угао који посматрана права гради са позитивним смјером  $x$ -осе износи  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$  (Слика 5).

Како је

$$\operatorname{tg} 135^\circ = -1 \iff k = -1,$$

то тражена једначина праве гласи

$$y + 7 = -(x - 3) \iff y = -x - 4.$$



Слика 5: Задатак 8.

9. Користећи формулу за синус двоструког угла, полазну једначину трансформирамо на следећи начин

$$\sin 2x + \cos x = 0 \iff 2 \sin x \cos x + \cos x = 0 \iff \cos x(2 \sin x + 1) = 0.$$

Дакле, довољно је ријешити једначину  $\cos x(2 \sin x + 1) = 0$ . Посљедња једнакост вриједи ако и само ако је

$$\cos x = 0 \vee 2 \sin x + 1 = 0 \iff \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}.$$

На интервалу  $[-\pi, \pi]$  вриједи да је  $\cos x = 0 \iff x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$ . Такође, на интервалу  $[-\pi, \pi]$  вриједи да је  $\sin x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6}$ . Из претходног слиједи да је збир рјешења дате једначине у интервалу  $[-\pi, \pi]$  једнак

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\pi.$$

10. Модуо комплексног броја  $z = a + bi$  је једнак  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Како је

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

то је

$$\left| \frac{1 + 3i}{1 - 3i} \right| = \frac{|1 + 3i|}{|1 - 3i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1.$$

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

**Јун 2017.****Задаци**

1. Израчунати вриједност израза  $\left(\frac{a+a^{-1}-1}{a+a^{-2}} - \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}+2}\right) : \frac{a^{-1}}{1+a^{-1}}$ .
2. Када је 20% канте празно, она садржи 15 литара воде више него када је 20% канте пуно. Колико литара воде може стати у пуну канту?
3. Ако је  $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^2$ , израчунати  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .
4. Одредити реални дио комплексног броја  $\frac{1}{2-\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$ , гдје је  $i$  имагинарна јединица.
5. Испитати да ли мање рјешење експоненцијалне једначине

$$5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 26$$

припада интервалу  $(0, 2)$ .

6. Ако су бројеви  $3, x_1, x_2, x_3, x_4, 13$  узастопни чланови аритметичког низа, колика је вриједност збира  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ?
7. Израчунати збир површина свих квадрата у равни чија су тјемења тачке  $O(0, 0)$  и  $A(1, 3)$ .
8. Одредити вриједност израза  $\left(1 - \sin \frac{\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \sin \frac{\pi}{8}\right)$ .
9. Израчунати мјеру оштрог угла ромба ако је дужина његове странице једнака квадратном коријену производа дужина његових дијагонала.
10. На колико начина се из скупа  $\{1, 2, \dots, 39, 40\}$  могу изабрати три различита броја таква да им збир буде непаран број?

## Рјешења

1. Имајући у виду да вриједи

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1),$$

дати израз трансформисамо на следећи начин

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a + a^{-1} - 1}{a + a^{-2}} - \frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1} + 2} \right) : \frac{a^{-1}}{1 + a^{-1}} \\ &= \left( \frac{a + \frac{1}{a} - 1}{a + \frac{1}{a^2}} - \frac{a - \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a} + 2} \right) : \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} \\ &= \left( \frac{\frac{a^2 - a + 1}{a^3 + 1} - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a + 1}}{\frac{a^3 + 1}{a^2}} \right) : \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a+1}{a}} \\ &= \left( \frac{a(a^2 - a + 1)}{a^3 + 1} - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a + 1} \right) : \frac{1}{a + 1} \\ &= \left( \frac{a(a^2 - a + 1)}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} - \frac{(a - 1)(a + 1)}{(a + 1)^2} \right) \cdot \frac{a + 1}{1} \\ &= \left( \frac{a}{a + 1} - \frac{a - 1}{a + 1} \right) \cdot (a + 1) = \frac{a - (a - 1)}{a + 1} \cdot (a + 1) \\ &= \frac{a - a + 1}{a + 1} \cdot (a + 1) = 1, \text{ при чему је } a \neq -1 \text{ и } a \neq 0. \end{aligned}$$

2. Нека је  $x$  број литара воде у пуној канти. Ако је 20% канте празно, онда је 80% канте пуно. На основу тога можемо поставити следећу једначину

$$0,8 \cdot x = 0,2 \cdot x + 15.$$

Сређивањем једначине добијамо да је  $0,6x = 15$ , одакле је  $x = 25$ .

3. Уводимо смјену  $\frac{x}{x-1} = t$ . За  $x \neq 1$  вриједи  $x = t(x-1)$ , одакле добијамо да је

$$x = \frac{t}{t-1}, \quad t \neq 1.$$

Даље из једнакости  $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^2$  добијамо

$$f(t) = \left(\frac{2 - \frac{t}{t-1}}{\frac{t}{t-1} - 1}\right)^2 = \left(\frac{2t - 2 - t}{\frac{t-1}{t-t+1}}\right)^2 = (t-2)^2.$$

Дакле, за  $x \neq 1$  добијемо да је  $f(x) = (x-2)^2$ . Уврштавањем вриједности  $x = \frac{1}{2}$  добијамо

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Други начин: Примјетимо да уврштавањем вриједности  $x = -1$  у  $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$  добијамо да је

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2 - (-1)}{-1 - 1}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

4. Нека је  $z = \frac{1}{2-\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$ . Користећи једнакост

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2,$$

број  $z$  можемо записати на следећи начин

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2-\sqrt{5}+i\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}-i\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{(2-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2-\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4-4\sqrt{5}+5+3} = \frac{2-\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{12-4\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})-i\sqrt{3}}{4(3-\sqrt{5})}. \end{aligned}$$

Реални дио комплексног броја  $z$  је  $\operatorname{Re}(z) = \frac{2-\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}$ , док је имагинарни дио

$\operatorname{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{4(3-\sqrt{5})}$ . Користећи се формулом за разлику квадрата реални дио можемо даље рационалисати

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{2-\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}-3\sqrt{5}-\sqrt{5}^2}{4(3^2-\sqrt{5}^2)} \\ &= \frac{6-\sqrt{5}-5}{4(9-5)} = \frac{1-\sqrt{5}}{16}. \end{aligned}$$

5. Полазну једначину можемо свести на њој еквиваленту једначину

$$5^x \cdot 5^{-1} + 5 \cdot \frac{1}{5^{x-2}} = 26,$$

на основу које даље добијамо

$$\frac{5^x}{5} + \frac{125}{5^x} = 26.$$

Множењем претходне једнакости са  $5^x$  добијамо

$$\frac{5^{2x}}{5} + 125 = 26 \cdot 5^x.$$

Увођењем смјене  $5^x = t$  у претходну једначину добијамо једначину

$$\frac{t^2}{5} + 125 = 26t,$$

коју даље сводимо на  $t^2 - 130t + 625 = 0$ . Рјешавањем квадратне једначине добијамо да је  $t_1 = 5$  и  $t_2 = 125$ . Враћајући се назад у смјену добијамо следеће двије једначине  $5^x = 5$  и  $5^x = 125$ . Из прве једначине добијамо да је  $5^x = 5^1$ , односно  $x = 1$ . Из друге једначине добијамо да је  $5^x = 125 = 5^3$ , односно  $x = 3$ . Дакле, једначина  $5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 26$  има два рјешења,  $x = 1$  и  $x = 3$ . Мање рјешење,  $x = 1$ , припада интервалу  $(0, 2)$ .

6. Означимо први члан посматраног аритметичког низа са  $x_0 = 3$ . Ако са  $d$  означимо разлику аритметичког низа, онда су наредни чланови тог низа:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + d, \\ x_2 &= x_1 + d = x_0 + 2d, \\ x_3 &= x_0 + 3d, \\ x_4 &= x_0 + 4d, \\ x_5 &= x_0 + 5d = 13. \end{aligned}$$

Из последње једначине добијамо да је  $d = 2$ . Уврштавајући  $d = 2$  у претходне формуле добијамо да су наредни чланови низа

$$x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 9, x_4 = 11.$$

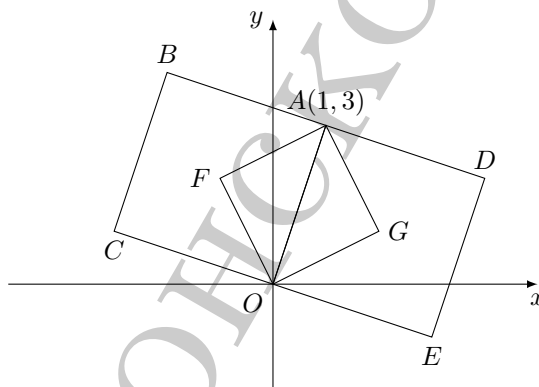
На основу тога добијамо да је

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 + 7 + 9 + 11 = 32.$$

7. Разликујемо случајеве када је  $OA$  страница квадрата и када је  $OA$  дијагонала квадрата. На Слици 6 су приказани квадрати  $OABC$ ,  $OEDA$  и  $OGAF$ . Ова три квадрата представљају све квадрате у равни чија су тјемена тачке  $O(0, 0)$  и  $A(1, 3)$ . Квадрати  $OABC$  и  $OEDA$  имају заједничку страну  $OA$ , па су њихове површине једнаке и износе

$$P(OABC) = P(OEDA) = |OA|^2$$

Дакле, да бисмо израчунали површине квадрата  $OABC$  и  $OEDA$ , прво морамо израчунати растојање између тачака  $O$  и  $A$ . Користећи формулу за растојање



Слика 6: Задатак 7.

између двије тачке добијамо да је

$$|OA| = \sqrt{(0-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10},$$

одакле имамо да је  $P(OABC) = P(OEDA) = 10$ .

Даље, површина квадрата  $OGAF$  једнака је  $|OF|^2$ . Дуж  $OA$  је дијагонала квадрата  $OGAF$ , па је  $|OA| = |OF| \cdot \sqrt{2}$ . На основу тога је  $|OF| = \frac{|OA|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$ , па је  $P(OGAF) = 5$ .

Дакле, збир површина свих квадрата у равни чија су тјемена тачке  $O(0, 0)$  и  $A(1, 3)$  је

$$P(OABC) + P(OEDA) + P(OGAF) = 10 + 10 + 5 = 25.$$

8. Користећи формулу за разлику квадрата и основни тригонометријски идентитет, дати израз можемо написати на следећи начин

$$(1 - \sin \frac{\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8}) = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}.$$

Примјеном формуле за косинус половине угла претходни израз се своди на облик

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \cos^2 \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}.$$

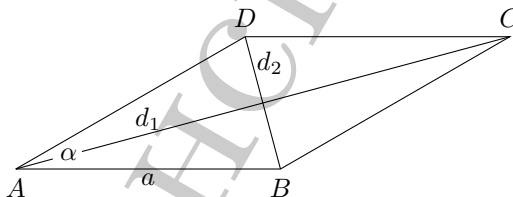
Како је  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , имамо да је

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

9. Ако са  $a$  означимо дужину странице, са  $d_1$  и  $d_2$  означимо дужине дијагонала и са  $\alpha$  означимо мјеру оштрог угла ромба  $ABCD$  (Слика 7), тада се површина ромба може израчунати на следећа два начина

$$P = \frac{d_1 d_2}{2} = a^2 \sin \alpha.$$

У задатку је дато да је  $a = \sqrt{d_1 d_2}$ , одакле добијамо да је  $a^2 = d_1 d_2$ , па је



Слика 7: Задатак 9.

површина ромба  $P(ABCD) = \frac{a^2}{2} = a^2 \sin \alpha$ . На основу тога добијамо да је  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ , па је  $\alpha = 30^\circ$ .

10. У скупу  $\{1, 2, \dots, 39, 40\}$  имамо 20 парних и 20 непарних бројева. Да би збир три броја био непаран, мора бити задовољен тачно један од наредна два услова:

- (а) Сва три броја су непарна;
- (б) Један број је непаран, а остала два су парна.

Број начина на који из скупа  $\{1, 2, \dots, 39, 40\}$  можемо изабрати три непарна броја је  $\binom{20}{3}$  (од 20 непарних бројева бирамо 3 броја).

Број начина на који из скупа  $\{1, 2, \dots, 39, 40\}$  можемо изабрати један непаран и два парна броја је  $\binom{20}{1} \cdot \binom{20}{2}$  (од 20 непарних бројева бирамо 1 број и од 20 парних бројева бирамо 2 броја).

Дакле, укупан број начина на који из скупа  $\{1, 2, \dots, 39, 40\}$  можемо изабрати

три броја таква да им је збир непаран је

$$\begin{aligned} & \binom{20}{3} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{2} \\ &= \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!} + \frac{20!}{1! \cdot (20-1)!} \cdot \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} \\ &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{6 \cdot 17!} + \frac{20 \cdot 19!}{19!} \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} \\ &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} + 20 \cdot \frac{20 \cdot 19}{2} \\ &= 20 \cdot 19 \cdot 3 + 20 \cdot 10 \cdot 19 = 1140 + 3800 = 4940. \end{aligned}$$

ИЗДАЊЕ

ЕЛЕКТРОНСКО

**Септембар 1 2017.****Задаци**

1. Израчунати вриједност израза  $\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1$ , ако је  $x = 16$ .
2. Ако се обим квадрата повећао за 25%, за колико се повећала површина тог квадрата?
3. Нека су  $\alpha$  и  $\beta$  рјешења квадратне једначине  $x^2 - 2x + 5 = 0$ . Израчунати вриједност израза  $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha^3 + \beta^3}$ .
4. Комплексни број  $z \neq 0$  има својство да је његов реални дио четири пута већи од његовог имагинарног дијела. Одредити количник реалног и имагинарног дијела броја  $z^2$ .
5. Одредити збир кубова рјешења експоненцијалне једначине

$$12 \cdot 16^{\frac{1}{x}} - 25 \cdot 12^{\frac{1}{x}} + 12 \cdot 9^{\frac{1}{x}} = 0.$$

6. Одредити збир рјешења логаритамске једначине  $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log(\sqrt[3]{x-40})} = 3$ .
7. Израчунати коефицијент правца симетрале дужи чије су крајње тачке  $A(-2, -1)$  и  $B(2, 2)$ .
8. Колико рјешења има тригонометријска једначина  $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$  на интервалу  $(0, 4\pi)$ ?
9. Дужина полупречника круга описаног око правоуглог троугла је 2, док су мјере општрих углова овог троугла у размјери 2 : 1. Колика је дужина висине која одговара хипотенузи тог троугла?
10. Колико има шестоцифрених природних бројева у чијем декадном запису нема цифре 1?

## Рјешења

1. Користећи једнакост  $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$  дати израз се трансформише на следећи начин

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1} \cdot x^{\frac{1}{4}}+1 &= \frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}+1)x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1} + 1 \\ &= \frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}+1} + 1 = \frac{x-1+x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+1)}{x^{\frac{1}{2}}+1} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Дакле, за  $x = 16$  вриједност полазног израза је  $\sqrt{16} = 4$ .

2. Нека је  $O_1$  обим квадрата прије повећања,  $a_1$  дужина станице квадрата прије повећања,  $O_2$  обим квадрата након повећања за 25% и  $a_2$  дужина станице квадрата након повећања. Тада је  $O_2 = O_1 + 0,25O_1 = 1,25O_1$ , односно  $4a_2 = 1,25 \cdot 4a_1$ , то јест  $a_2 = 1,25a_1$ . Нека је  $P_1 = a_1^2$  површина квадрата прије повећања, а  $P_2$  површина квадрата након повећања. Тада је  $P_2 = a_2^2 = (1,25a_1)^2 = 1,5625a_1^2 = 1,5625P_1 = P_1 + 0,5625P_1$ . Дакле, површина квадрата се повећала за 56,25%.

3. Дати израз можемо записати у следећем облику

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha^3 + \beta^3} &= \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta}{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 3\alpha\beta)} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{(\alpha + \beta)((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta)}. \end{aligned}$$

Пошто су  $\alpha$  и  $\beta$  рјешења квадратне једначине  $x^2 - 2x + 5 = 0$ , онда из Вијетових формула добијамо да је  $\alpha + \beta = 2$  и  $\alpha \cdot \beta = 5$ . Уврштавајући добијено у горе наведену једнакост добијамо да је

$$\frac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{(\alpha + \beta)((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta)} = \frac{4 - 5}{2(4 - 15)} = \frac{1}{22}.$$

4. Из услова задатка закључујемо да дати комплексан број  $z$  можемо записати у облику  $z = 4a + ia$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , гдје је  $i$  имагинарна јединица. Тада је

$$z^2 = (4a + ia)^2 = 16a^2 + 8ia^2 - a^2 = 15a^2 + 8ia^2, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Дакле, количник реалног и имагинарног дијела броја  $z^2$  је  $\frac{15a^2}{8a^2} = \frac{15}{8} = 1,875$ .

5. Дата једначина је дефинисана на скупу  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и она је еквивалентна једначини

$$12 \cdot 4^{\frac{2}{x}} - 25 \cdot 3^{\frac{1}{x}} \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 12 \cdot 3^{\frac{2}{x}} = 0.$$

Пошто је  $3^{\frac{1}{x}} \cdot 4^{\frac{1}{x}} \neq 0$  за свако  $x \in D$ , дијелењем претходне једначине са  $3^{\frac{1}{x}} \cdot 4^{\frac{1}{x}}$  добијамо једначину

$$12 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 25 + 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Нека је  $(\frac{3}{4})^{\frac{1}{x}} = t$ . Пошто је  $t = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{x}} \neq 0$  за свако  $x \in D$ , онда је  $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{x}} = (\frac{3}{4})^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{(\frac{3}{4})^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{t}$ , па се претходна једначина своди на једначину

$$\frac{12}{t} - 25 + 12t = 0.$$

Из последње једначине добијамо квадратну једначину  $12t^2 - 25t + 12 = 0$ . Рјешења ове једначине су

$$t_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{24} = \frac{25 \pm 7}{24},$$

одакле је  $t_1 = \frac{3}{4}$  и  $t_2 = \frac{4}{3}$ . Враћајући назад смјену добијамо двије једначине,  $(\frac{3}{4})^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$  и  $(\frac{3}{4})^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{3}$ . Из прве једначине добијамо рјешење  $x_1 = 1$ , док из друге једначине добијамо рјешење  $x_2 = -1$ .

Дакле, једначина  $12 \cdot 16^{\frac{1}{x}} - 25 \cdot 12^{\frac{1}{x}} + 12 \cdot 9^{\frac{1}{x}} = 0$  има два рјешења,  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -1$ . Збир кубова њених рјешења је  $x_1^3 + x_2^3 = 1^3 + (-1)^3 = 0$ .

**6.** Дата једначина је дефинисана ако су испуњени следећи услови:

(а)  $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$ ,

(б)  $\sqrt[3]{x - 40} > 0 \iff x - 40 > 0 \iff x > 40$ ,

(ц)  $\log(\sqrt[3]{x - 40}) \neq 0 \iff \sqrt[3]{x - 40} \neq 1 \iff x - 40 \neq 1 \iff x \neq 41$ ,

Како за  $x \geq -1$  вриједи  $\sqrt{x+1} + 1 > 0$ , овај услов не наглашавамо. Дакле, дату једначину рјешавамо на скупу  $D = (40, 41) \cup (41, +\infty)$ .

Израз  $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log(\sqrt[3]{x-40})}$  се може записати у следећем облику

$$\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log(\sqrt[3]{x-40})} = \frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log(x-40)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\frac{1}{3}\log(x-40)} = 3 \frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log(x-40)},$$

што значи да је полазна једначина еквивалентна једначини

$$\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log(x-40)} = 1.$$

Пошто је  $\log(x-40) \neq 0$  за свако  $x \in D$ , множењем последње једначине са  $\log(x-40)$  добијамо једначину

$$\log(\sqrt{x+1}+1) = \log(x-40),$$

која је еквивалентна једначини

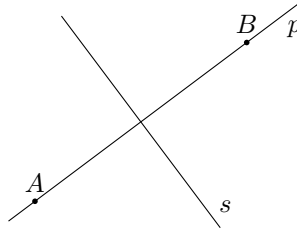
$$\sqrt{x+1} + 1 = x - 40.$$

Последња једначина се своди на једначину  $\sqrt{x+1} = x - 41$ , из које се након квадрирања и сређивања добија квадратна једначина

$$x^2 - 83x + 1680 = 0.$$

Рјешења ове квадратне једначине су  $x_1 = 35$  и  $x_2 = 48$ . Пошто је полазна једначина дефинисана за  $x \in (40, 41) \cup (41, +\infty)$  у обзир узимамо само рјешење  $x_2 = 48$ . Дакле, збир рјешења једначине  $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log(\sqrt[3]{x-40})} = 3$  је 48.

7. Означимо са  $s$  симетралу дужи  $AB$ . Права  $s$  је нормална на праву  $p$  која пролази кроз тачке  $A$  и  $B$  (Слика 8).



Слика 8: Задатак 7.

Користећи формулу за једначину праве кроз двије тачке добијамо да је једначина праве  $p$

$$y + 1 = \frac{2 + 1}{2 + 2}(x + 2),$$

која се своди на

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Нека је  $k_1$  коефицијент правца праве  $p$  и нека је  $k_2$  коефицијент правца праве  $s$ . Из једначине праве  $p$  закључујемо да је  $k_1 = \frac{3}{4}$ . Пошто су праве  $p$  и  $s$  међусобно нормалне, вриједи да је  $k_1 \cdot k_2 = -1$ , одакле закључујемо да је  $k_2 = -\frac{4}{3}$ . Дакле, коефицијент правца симетрале дужи чије су крајње тачке  $A(-2, -1)$  и  $B(2, 2)$  је  $-\frac{4}{3}$ .

8. Користећи основни тригонометријски идентитет дата једначина се може записати у облику  $1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$ , који се своди на  $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ . Уводећи смјену  $\cos x = t$  у претходну једначину добијамо квадратну једначину  $t^2 - t - 2 = 0$ , чија су рјешења  $t_1 = -1$  и  $t_2 = 2$ . Враћајући назад смјену добијамо двије једначине  $\cos x = -1$  и  $\cos x = 2$ .

Како су вриједности  $\cos x$  елементи скупа  $[-1, 1]$ , друга једначина нема рјешења. Потребно је ријешити само једначину  $\cos x = -1$ . Рјешења ове једначине су сви бројеви облика  $\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Дакле, једначина  $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$  на интервалу  $(0, 4\pi)$  има 2 рјешења:  $\pi$  и  $3\pi$ .

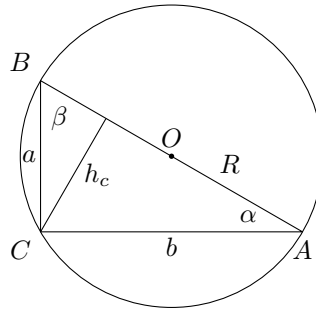
9. Нека је  $O$  центар описане кружнице,  $R$  дужина полупречника описане кружнице,  $h_c$  дужина висине на хипотенузу, а  $\alpha$  и  $\beta$  мјере оштрих углова правоуглог троугла  $CAB$  (Слика 9).

У задатку је дато да је  $\alpha : \beta = 2 : 1$ , одакле се добија да је  $\alpha = 2\beta$ . Пошто у правоуглом троуглу важи да је  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , добијамо да је  $2\beta + \beta = 90^\circ$ . Одатле је  $\beta = 30^\circ$ , а  $\alpha = 60^\circ$ .

Такође, у правоуглом троуглу важи да је  $c = 2R$ , одакле добијамо да је  $c = 4$ . Видимо да у правоуглом троуглу  $CAB$  вриједи  $\sin 60^\circ = \frac{a}{c}$  и  $\sin 30^\circ = \frac{b}{c}$  из чега се добија да је  $a = 2\sqrt{3}$ , а  $b = 2$ .

Површину троугла  $CAB$  можемо израчунати на следећа два начина

$$P = \frac{ch_c}{2} = \frac{ab}{2},$$



Слика 9: Задатак 9.

одакле добијамо да је

$$h_c = \frac{ab}{c} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{4} = \sqrt{3}.$$

**10.** Нека су са  $\overline{abcdef}$  представљени сви природни шестоцифрени бројеви у чијем запису нема цифре 1. На прву позицију броја можемо поставити тачно осам цифара (све цифре осим нуле и јединице). На другу позицију броја можемо поставити тачно 9 цифара (било коју цифру осим јединице). Аналогно, за сваку следећу позицију имамо по 9 могућности (можемо изабрати било коју цифру осим јединице). Дакле, укупан број природних шестоцифрених бројева у чијем запису нема цифре 1 је  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^5$ .

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

**Септембар 2 2017.****Задаци**

1. Роба је коштала 80КМ. Затим је појефтинила 10%, а након тога још 10%. Колика је цијена робе након свих појефтињења?
2. Израчунати вриједност израза  $(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) \cdot \frac{ab}{a-b}$ .
3. Израчунати реални дио комплексног броја  $\frac{i^{123}}{(1-i)(2+i)}$ .
4. Ако је  $f(x+2) = x - 3$ , колико је  $f(x-2)$ ?
5. Наћи збир рјешења логаритамске једначине  $\log(x^2 + 19) - \log(x - 8) = 2$ .
6. Одредити вриједности параметра  $m$  за које рјешења квадратне једначине  $x^2 - (m+1)x + m = 0$  задовољавају услов  $x_1^2 + x_2^2 = 10$ .
7. Одредити број рјешења тригонометријске једначине  $\sin x(3 - 3\sin x - \cos^2 x) = 0$  на интервалу  $[0, 2\pi]$ .
8. Два тјемена једнакостраничног троугла смјештеног у четвртом квадранту координатне равни су  $(0, 0)$  и  $(4, 0)$ . Одредити координате трећег тјемена.
9. Дужина висине правилне шестостране пирамиде је  $\sqrt{3}$ , а дужина основне ивице базе пирамиде је 2. Израчунати запремину ове пирамиде.
10. Број дијагонала конвексног многоугла је 14. Одредити збир унутрашњих углова тог многоугла.

## Рјешења

1. Након првог појефтињења од 10% цијена робе је  $80 - 0,1 \cdot 80 = 72$ . Након другог појефтињења од 10% цијена робе је  $72 - 0,1 \cdot 72 = 64,8$ . Дакле, након свих појефтињења цијена робе је 64,8 КМ.

2.

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{ab}{a-b} = \frac{b-a}{ab} \cdot \frac{ab}{a-b} = -1, \quad a \neq 0, b \neq 0, a \neq b.$$

3. Пошто је  $i^4 = 1$ , онда је  $i^{123} = (i^4)^{30} \cdot i^3 = i^3 = -i$ , гдје је  $i$  имагинарна јединица. На основу тога добијамо да је

$$\frac{i^{123}}{(1-i)(2+i)} = \frac{-i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.$$

Дакле, реални дио комплексног броја  $\frac{i^{123}}{(1-i)(2+i)}$  је  $\frac{1}{10}$ .

4. Уводимо смјену  $x+2=t$ . Одавде је  $x=t-2$ . Из једнакости  $f(x+2) = x-3$  добијамо да је  $f(t) = t-5$ . На основу тога је  $f(x) = x-5$ , па је  $f(x-2) = (x-2)-5 = x-7$ .

5. Пошто је  $x^2 + 19 > 0$  за свако  $x \in \mathbb{R}$ , дата једначина је дефинисана ако и само ако је  $x-8 > 0$ . Дакле, дата једначина је дефинисана на скупу  $D = (8, +\infty)$ .

Једначина  $\log(x^2 + 19) - \log(x-8) = 2$  се може записати у облику

$$\log\left(\frac{x^2 + 19}{x-8}\right) = \log 10^2.$$

Посљедња једначина је еквивалентна једначини

$$\frac{x^2 + 19}{x-8} = 100.$$

Пошто је  $x-8 \neq 0$  за свако  $x \in D$ , множењем претходне једначине са  $x-8$  добијамо квадратну једначину  $x^2 - 100x + 819 = 0$ . Рјешења ове једначине су  $x_1 = 9$  и  $x_2 = 91$ . Како оба рјешења припадају домену  $D$ , збир рјешења једначине  $\log(x^2 + 19) - \log(x-8) = 2$  је  $x_1 + x_2 = 9 + 91 = 100$ .

6. Израз  $x_1^2 + x_2^2$  можемо записати у сљедећем облику

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Пошто су  $x_1$  и  $x_2$  рјешења квадратне једначине  $x^2 - (m+1)x + m = 0$ , из Вијетових формула добијамо да је

$$x_1 + x_2 = m + 1 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = m.$$

Уврштавајући ово у претходно добијену једнакост добијамо да вриједи

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \iff (m+1)^2 - 2m = 10.$$

Сређивањем посљедње једнакости добијамо квадратну једначину  $m^2 - 9 = 0$ . Рјешења ове једначине су  $m_1 = -3$  и  $m_2 = 3$ . Дакле, за  $m \in \{-3, 3\}$  рјешења квадратне једначине  $x^2 - (m+1)x + m = 0$  задовољавају услов  $x_1^2 + x_2^2 = 10$ .

7. Производ два броја је једнак нули ако и само ако је бар један од тих бројева једнак нули. То значи да је  $\sin x(3 - 3 \sin x - \cos^2 x) = 0$  ако и само је  $\sin x = 0$  или  $3 - 3 \sin x - \cos^2 x = 0$ .

Рјешења једначине  $\sin x = 0$  су бројеви облика  $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Рјешења која припадају интервалу  $[0, 2\pi]$  су  $0, \pi$  и  $2\pi$ .

Једначина  $3 - 3 \sin x - \cos^2 x = 0$  се може записати у облику

$$2 - 3 \sin x + 1 - \cos^2 x = 0.$$

Након примјене основног тригонометријског идентитета добијамо једначину

$$\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0.$$

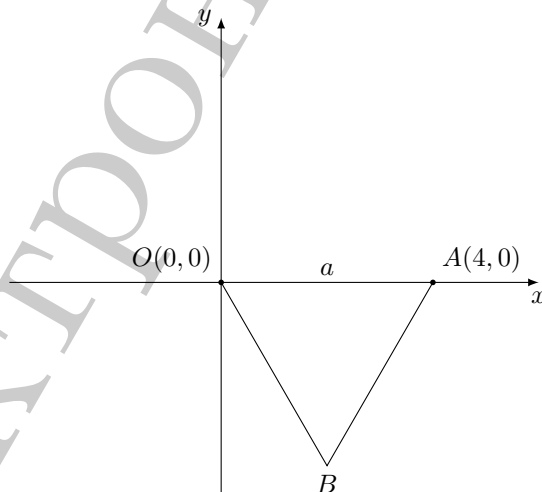
Увођењем смјене  $\sin x = t$  у претходну једначину добијамо квадратну једначину

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Рјешења ове квадратне једначине су  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 2$ . Враћајући назад смјену добијамо једначине  $\sin x = 1$  и  $\sin x = 2$ . Како су вриједности  $\sin x$  елементи скупа  $[-1, 1]$ , друга једначина нема рјешења. Рјешења једначине  $\sin x = 1$  су бројеви облика  $x_l = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ . Стога,  $\frac{\pi}{2}$  је једино рјешење ове једначине које припада интервалу  $[0, 2\pi]$ .

Дакле, на интервалу  $[0, 2\pi]$  једначина  $\sin x(3 - 3 \sin x - \cos^2 x) = 0$  има 4 рјешења:  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ , и  $2\pi$ .

8. Означимо са  $O$  тачку чије су координате  $(0, 0)$ , а са  $A$  тачку чије су координате  $(4, 0)$ . Нека је  $a$  дужина странице једнакостраничног троугла  $OAB$  (Слика 10). Користећи формулу за удаљеност између двије тачке добијамо да



Слика 10: Задатак 8.

$$\text{је } a = \sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - 0)^2} = 4.$$

Ако са  $(x, y)$  означимо координате тачке  $B$ , тада вриједи

$$a = d(O, A) = d(O, B) = d(A, B),$$

односно

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 4.$$

Из посљедњих једнакости добијамо систем од двије једначине са двије непознате

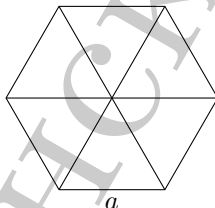
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ (x-4)^2 + y^2 &= 16. \end{aligned}$$

Одузимајући прву једначину од друге добијамо једначину

$$(x-4)^2 - x^2 = 0.$$

Сређивањем ове једначине добија се једначина  $8x = 16$ , из које добијамо да је  $x = 2$ . Уврштавајући  $x = 2$  у једначину  $x^2 + y^2 = 16$  добијамо да је  $y_1 = -2\sqrt{3}$  и  $y_2 = 2\sqrt{3}$ . Пошто је у задатку наведено да је тражени једнакостранични троугао у четвртном квадранту координатне равни, закључујемо да тачка  $B$  мора имати координате  $(2, -2\sqrt{3})$ .

9. Запремину пирамиде рачунамо по формули  $V = \frac{1}{3}BH$ , гдје је  $H$  дужина висине пирамиде, а  $B$  површина многоугла у бази пирамиде. База пирамиде је



Слика 11: Задатак 9.

правилан шестоугао ивице  $a = 2$ . Пошто је правилан шестоугао сачињен од 6 једнакостраничних троуглова (Слика 11), то је површина шестоугла у основи пирамиде

$$B = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

На основу тога добијамо да је запремина пирамиде

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6.$$

10. Нека је  $n$  број страница конвексног многоугла. Из формуле за број дијагонала конвексног многоугла добијамо да је  $\frac{n(n-3)}{2} = 14$ . Сређивањем ове једнакости добијамо квадратну једначину  $n^2 - 3n - 28 = 0$ . Рјешења ове једначине су  $n_1 = -4$  и  $n_2 = 7$ . Пошто  $n$  предстаља број страница конвексног многоугла,  $n$  мора бити позитивно, па је  $n = 7$ . Дакле, збир унутрашних углова посматраног многоугла је  $(n-2) \cdot 180^\circ = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$ .

## Јул 2018.

## Задаци

1. Упростити израз

$$\left[ \left( \frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} \right) : \left( \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right] : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}}.$$

2. На почетку се 50% од укупне количине воде у цистерни излије у базен, затим још 100 литара и на крају још 5% од преостале воде у цистерни. Тиме је дошло до повећања количине воде у базену за 31%. Ако је у почетку било 2000 литара воде у базену, колико литара воде је на почетку било у цистерни?

3. Одредити број рјешења тригонометријске једначине

$$2 \cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1,$$

у интервалу  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

4. Одредити комплексан број

$$\left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^{2018}.$$

5. Одредити производ рјешења логаритамске једначине

$$\log_{\pi} |x^2 - 1| = \log_{\sqrt{\pi}} |x|.$$

6. Одредити скуп рјешења експоненцијалне неједначине

$$3^x + 3^{|x|} \leq 3.$$

7. Дијагонале једнакокраког трапеза су међусобно нормалне. Одредити површину тог трапеза, ако је дужина његове средње линије једнака 5.

8. Збир површина бочних страна праве правилне тростране пирамиде је пет пута већи од површине њене базе. Ако је дужина ивице базе пирамиде једнака
- $a$
- , одредити запремину купе уписане у ту пирамиду.

9. Одредити удаљеност између додирних тачака тангенти елипсе
- $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$
- које су нормалне на праву
- $x - y + 5 = 0$
- .

10. Колико има пермутација цифара 0, 1, 2, ..., 9 у којима између цифара 2 и 3 стоје тачно три друге цифре?

## Рјешења

1.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( \frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} \right) : \left( \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right] : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}} \\
 &= \left( \frac{x^3 + y^3}{xy^3} : \frac{x^2 - xy + y^2}{xy^2} \right) : \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{\frac{x+y}{x}} \\
 &= \left( \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy^3} \cdot \frac{xy^2}{x^2 - xy + y^2} \right) : \frac{x(x+y)^2}{x+y} \\
 &= \frac{x+y}{y} \cdot \frac{1}{x(x+y)} \\
 &= \frac{1}{xy}, \quad x, y \neq 0, x \neq -y.
 \end{aligned}$$

2. Означимо са  $x$  укупну количину воде у цистерни на почетку. На основу задатка, можемо поставити једначину

$$0,5x + 100 + 0,05(0,5x - 100) = 2000 + 2000 \cdot 0,31$$

што је еквивалентно са

$$0,5x + 100 + 0,025x - 5 = 2620.$$

Претходна једначина своди се на једначину

$$0,525x = 2525,$$

одакле је  $x \approx 4809,5l$ .

3. Користећи формуле за косинус и синус двоструког угла

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

полазна једначина се трансформише у следећу једначину

$$2 \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

што је еквивалентно са

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x + 2 \sin x \cos x = 0.$$

Из једнакости

$$\cos x(2 \cos x + 2 \sin x - 2) = 0$$

слиједи да је  $\cos x = 0$  или  $2 \cos x + 2 \sin x - 2 = 0$ . Рјешења једначине  $\cos x = 0$  су облика

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Уврштавајући вриједности за  $k$ , закључујемо да се у интервалу  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  налазе само рјешења

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ и } x = -\frac{\pi}{2}.$$

Из једнакости

$$2 \cos x + 2 \sin x - 2 = 0$$

слиједи

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Квадрирањем последње једнакости, добијамо

$$2 \sin x \cos x = 0,$$

тј.

$$\sin 2x = 0.$$

Рјешења ове једначине су облика

$$2x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

тј.

$$x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Уврштавајући вриједности за  $k$ , закључујемо да се у интервалу  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  налазе само рјешења

$$x = -\frac{\pi}{2}, x = 0 \text{ и } x = \frac{\pi}{2}.$$

Дакле, закључујемо да полазна једначина има укупно 3 рјешења у посматраном интервалу.

4. Сваки комплексан број  $\omega = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  можемо записати у тригонометријском облику на сљедећи начин

$$\omega = r(\cos \phi + i \sin \phi),$$

при чему је  $r$  модуо тог комплексног броја, а  $\phi$  аргумент тог комплексног броја. Комплексан број

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$

можемо записати као

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{2i\sqrt{3} - 2}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Користећи тригонометријски облик комплексног броја, добијамо да је

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Треба да одредимо  $\omega^{2018}$ . Користећи Моаврову формулу:

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi, \quad n \in \mathbb{N}$$

и користећи својства да су синус и косинус периодичне функције са периодом  $2k\pi$  при чему је  $k \in \mathbb{Z}$ , добијамо да је

$$\begin{aligned}\omega^{2018} &= \cos\left(2018 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(2018 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4036\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4036\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(1344\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(1344\pi + \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

5. Дата једначина дефинисана је на скупу  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ . Користећи својство логаритамске функције

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

полазну једначину записујемо у следећем облику

$$\log_{\pi} |x^2 - 1| = 2 \log_{\pi} |x|,$$

тј.

$$\log_{\pi} |x^2 - 1| = \log_{\pi} x^2,$$

одакле је

$$|x^2 - 1| = x^2,$$

тј.

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2} \right| = 1.$$

Слиједи да је  $\frac{x^2-1}{x^2} = -1$  или  $\frac{x^2-1}{x^2} = 1$ . Рјешења једначине  $x^2 - 1 = -x^2$  су

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а она припадају скупу  $D$ . Једначина  $x^2 - 1 = x^2$  нема рјешења. Дакле, производ рјешења полазне једначине је  $-\frac{1}{2}$ .

6. Разликујемо два случаја.

Ако је  $x \geq 0$ , слиједи да је  $|x| = x$ , па се полазна неједначина своди на неједначину

$$3^x + 3^x \leq 3,$$

тј.

$$2 \cdot 3^x \leq 3.$$

Дијелењем посљедње неједнакости са 2, добијамо неједначину

$$3^x \leq \frac{3}{2}.$$

Како је база логаритма  $3 > 1$ , слиједи да мора бити

$$x \leq \log_3 \frac{3}{2}.$$

Из услова  $x \geq 0$ , слиједи да овај случај задовољавају рјешења  $x$  таква да је

$$0 \leq x \leq \log_3 \frac{3}{2}.$$

Ако је  $x < 0$ , слиједи да је  $|x| = -x$ , па се полазна неједначина своди на неједначину

$$3^x + 3^{-x} \leq 3.$$

Множењем добијене неједначине са  $3^x > 0$ , добијамо неједначину

$$3^{2x} + 1 \leq 3 \cdot 3^x.$$

Уводећи смјену  $3^x = t > 0$ , претходна неједначина може да се запише као квадратна неједначина

$$t^2 - 3t + 1 \leq 0,$$

чија рјешења  $t$  припадају интервалу  $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ . Враћајући смјену, добијамо да рјешења  $x$  полазне неједначине морају задовољавати услове

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq 3^x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

одакле логаритмовањем добијамо

$$x \geq \log_3 \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

и

$$x \leq \log_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Како је у овом случају  $x < 0$  и како су  $\log_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$  и  $\log_3 \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 0$ , слиједи да мора да вриједи

$$\log_3 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x < 0.$$

Рјешење полазне неједначине је унија интервала из претходна два случаја, тј. рјешење је свако  $x$  из интервала  $\left[\log_3 \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \log_3 \frac{3}{2}\right]$ .

**7.** Означимо са  $a$  основицу  $AB$ , са  $b$  основицу  $CD$  и са  $O$  пресјечну тачку дијагонала у једнакокром трапезу  $ABCD$ . (Слика 12) Како је  $|AD| = |BC|$ ,  $|AB| = |CD|$  и  $\angle ABC = \angle BAD$ , то су троуглови  $ABD$  и  $BAC$  подударни, па је  $\angle BAO = \angle ABO$ . Како се дијагонале у посматраном трапезу сијеку под правим углом, то је  $\angle AOB = 90^\circ$ .

Из свега наведеног слиједи да је  $\angle ABO = \angle BAO = 45^\circ$ , па је троугао  $ABO$  једнакокром правоугли троугао. На сличан начин се показује да је троугао  $CDO$  једнакокром правоугли троугао.

Означимо са  $M$  и  $N$  редом средишта основица  $AB$  и  $CD$ , са  $h_a$  висину  $OM$  у

троуглу  $ABO$ , а са  $h_b$  висину  $ON$  у троуглу  $CDO$ . Како су  $h_a$  и  $h_b$  висине у једнакокраним троугловима, слиједи да је

$$|AM| = |MB| = \frac{a}{2}$$

и

$$|CN| = |ND| = \frac{b}{2}.$$

Такође, како је троугао  $MBO$  и троугао  $NOC$  једнакокрани правоугли, слиједи да је

$$h_a = \frac{a}{2}$$

и

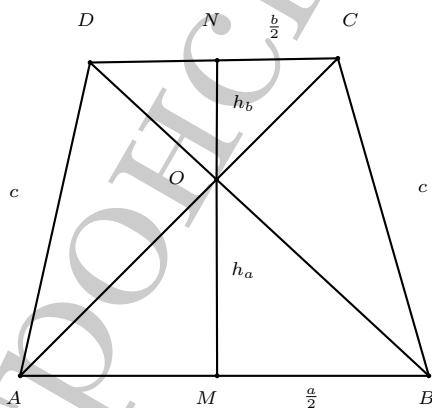
$$h_b = \frac{b}{2}.$$

Очигледно је висина посматраног трапеза

$$h = h_a + h_b = \frac{a+b}{2} = m,$$

при чему је  $m$  средња линија трапеза. Како је  $m = 5$ , слиједи да је површина трапеза  $ABCD$  једнака

$$P = m \cdot h = m \cdot m = 25.$$



Слика 12: Задатак 7.

8. Означимо са  $a$  ивицу базе пирамиде, са  $h$  висину бочне стране пирамиде, са  $B_1$  површину базе, а са  $M$  површину омотача посматране пирамиде. (Слика 13)

Из услова задатка је

$$M = 5B_1 \iff \frac{3ah}{2} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{4},$$

одакле добијамо да је

$$h = \frac{5}{6}a\sqrt{3}.$$

Полупречник базе купе уписане у пирамиду је једнак полупречнику круга уписаног у једнакостранични троугао стране  $a$ , одакле слиједи да је

$$r = r_u = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

Означимо са  $H$  висину посматране купе, са  $O$  подножје висине  $H$  на базу пирамиде и са  $D$  подножје висине из врха пирамиде  $S$  на ивицу базе те пирамиде. Примјеном Питагорине теореме на троугао  $SOD$  слиједи да је

$$H^2 + r^2 = h^2,$$

из чега добијамо да је

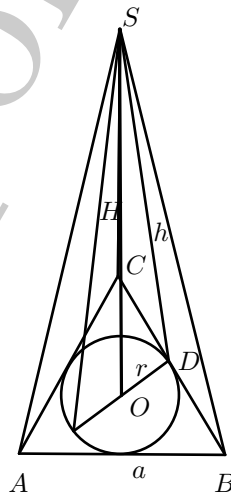
$$H = a\sqrt{2}.$$

Нека је  $B_2$  површина базе посматране купе. Вриједи да је

$$B_2 = r^2\pi = \frac{a^2}{36} \cdot 3\pi = \frac{a^2\pi}{12}.$$

Слиједи да је запремина купе уписане у посматрану пирамиду једнака

$$V = \frac{B_2 H}{3} = \frac{a^2\pi}{36} \cdot H = \frac{a^2\pi}{36} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{36}.$$



Слика 13: Задатак 8.

9. Права  $y = kx + n$  је тангента на елипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ако задовољава услов

$$a^2k^2 + b^2 = n^2.$$

Како посматрамо тангенте које су нормалне на праву  $p : y = x + 5$ , то је коефицијент праваца тих тангенти једнак

$$k = -1.$$

Одредимо  $n$  из услова одозго

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \iff 6k^2 + 3 = n^2.$$

Како је  $k = -1$ , то треба да ријешимо једначину

$$n^2 = 9.$$

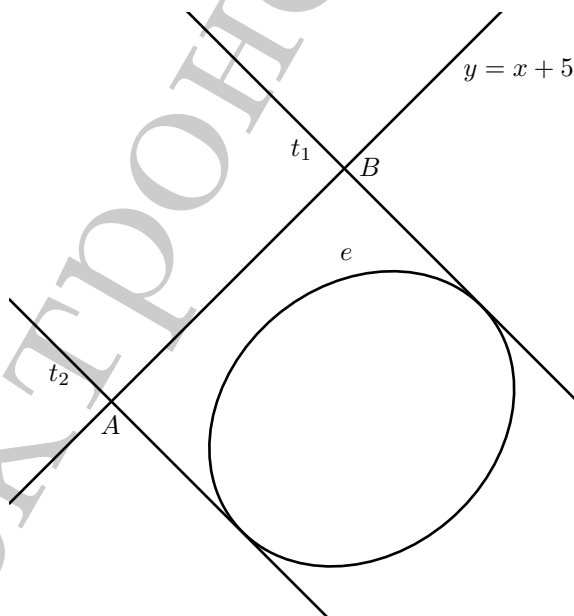
Рјешења посматране квадратне једначине су  $n = 3$  или  $n = -3$ . Дакле, једначина тангенте  $t_1$  је

$$y = -x + 3,$$

а једначина тангенте  $t_2$  је

$$y = -x - 3.$$

Означимо са  $A$  пресјечну тачку праве  $p$  и тангенте  $t_2$ , а са  $B$  пресјечну тачку праве  $p$  и тангенте  $t_1$ . (Слика 14)



Слика 14: Задатак 9.

Уочимо да је тражена удаљеност између додирних тачака тангенти на посматрану елипсу заправо једнака удаљености од тачке  $A$  до тачке  $B$ . Координате тачке  $A$  добијамо из система једначина

$$\begin{aligned} -x - 3 &= y \\ x + 5 &= y, \end{aligned}$$

а координате тачке  $B$  добијамо из система једначина

$$\begin{aligned} -x + 3 &= y \\ x + 5 &= y. \end{aligned}$$

Добијамо да су координате тачака  $A$  и  $B$

$$A(-4, 1), B(-1, 4).$$

Тражену удаљеност рачунамо по формули

$$d(t_1, t_2) = d(A, B) = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

**10.** Постоји 6 могућности избора позиција за цифре 2 и 3 у посматраним пермутацијама: цифра 2 може да стоји на позицијама 1, 2, 3, 4, 5, 6 и у тим случајевима цифра 3 се јавља на позицијама 5, 6, 7, 8, 9, 10. Преосталих 8 цифара могу међусобно да се пермутују на  $8!$  начина. Такође, и цифре 2 и 3 у посматраним пермутацијама, могу замијенити мјеста, па је укупан број пермутација које задовољавају тражени услов једнак

$$6 \cdot 2 \cdot 8! = 12 \cdot 8! = 483840.$$

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

## Септембар 2018.

## Задачи

1. Средити израз

$$\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}\right)\right] : \frac{c+b-a}{abc}.$$

2. Замислимо један природан број и његовом декадном запису додајмо с десна неку цифру. Од тако добијеног броја одузмимо квадрат замишљеног броја. Испоставља се да је добијена разлика осам пута већа од замишљеног броја. Који је број на почетку био замишљен?
3. Наћи сва рјешења тригонометријске једначине  $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -\sqrt{2}$  у интервалу  $(0, \pi)$ .
4. Одредити реални и имагинарни дио комплексног броја  $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ , гдје је  $i$  имагинарна јединица.
5. Ријешити неједначину  $\frac{3}{2-x^2} \leq 1$ .
6. Ријешити логаритамску неједначину  $\log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1$ .
7. У квадрат  $ABCD$  чија је страница дужине  $a$  уписана је кружница која страницу  $CD$  додирује у тачки  $E$ . Дуж  $AE$  сијече кружницу у тачки  $F$ . Колика је дужина тетиве  $EF$ ?
8. Збир површина бочних страна правилне праве троуглаоне пирамиде је 3 пута већи од површине њене базе. Колики је синус угла између бочне ивице и висине пирамиде?
9. За које вриједности реалног параметра  $m$  се праве чије су једначине  $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$  и  $(2m - 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$  сијекну у тачки на  $y$ -оси?
10. Колико има петодигитних природних бројева дјеливих са три којима је средња цифра једнака 6?

## Рјешења

1. Користећи једнакости  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  и  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  дати израз се трансформише на следећи начин

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}\right)\right] : \frac{c+b-a}{abc} \\ &= \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cdot \left[\left(\frac{b+c-a}{a(b+c)}\right) : \left(\frac{a+b+c}{a(b+c)}\right)\right] \cdot \frac{abc}{b+c-a} \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{b+c-a}{a(b+c)} \cdot \frac{a(b+c)}{a+b+c} \cdot \frac{abc}{b+c-a} \\ &= \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{2bc} \cdot \frac{abc}{a+b+c} = \frac{a(b+c-a)}{2}, \\ & a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, b \neq -c, a+b+c \neq 0, b+c-a \neq 0. \end{aligned}$$

2. Означимо са  $x$  замишљени број. Након додавања цифре  $c$  са десне стране декадног записа замишљеног броја добијамо број  $10x+c$ . Из услова задатка добијамо да је  $(10x+c) - x^2 = 8x$ . Сређивањем претходне једначине добијамо једначину

$$x^2 - 2x - c = 0.$$

Рјешења ове једначине су

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4c}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+c}}{2} = 1 \pm \sqrt{c+1}.$$

Пошто је у задатку наведено да је замишљен природан број  $x$ , цифра  $c$  мора бити таква да је  $1 \pm \sqrt{c+1}$  природан број. Једине цифре које задовољавају тај услов су 0, 3 и 8. Ако је  $c = 0$ , онда је  $x = 2$ . Ако је  $c = 3$ , онда је  $x = 3$ , а ако је  $c = 8$  онда је  $x = 4$ .

3. Дијелењем дате једначине са 2 добијамо једначину

$$\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пошто је  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  и  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , претходна једначина се може записати у облику

$$\sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Користећи адициону формулу за синус разлике углова последњу једначину можемо записати као

$$\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Рјешења ове једначине су бројеви облика

$$\frac{\pi}{6} - 2x_k = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \iff x_k = \frac{-13\pi - 24k\pi}{24} \iff x_k = \frac{11\pi + 24k\pi}{24}, k \in \mathbb{Z}$$

и бројеви облика

$$\frac{\pi}{6} - 2x_l = \frac{7\pi}{4} + 2l\pi \iff x_l = \frac{-19\pi - 24l\pi}{24} \iff x_l = \frac{5\pi + 24k\pi}{24}, l \in \mathbb{Z}.$$

Од рјешења облика  $x_k = \frac{11\pi + 24k\pi}{24}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , једино рјешење  $\frac{11\pi}{24}$  припада интервалу  $(0, \pi)$ , док од рјешења облика  $x_l = \frac{5\pi + 24l\pi}{24}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , једино рјешење  $\frac{5\pi}{24}$  припада интервалу  $(0, \pi)$ . Дакле, на интервалу  $(0, \pi)$  једначина  $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -\sqrt{2}$  има два рјешења:  $\frac{5\pi}{24}$  и  $\frac{11\pi}{24}$ .

4. Пошто је  $(1+i)^2 = 1+2i-1=2i$ , а  $(1-i)^2 = 1-2i-1=-2i$ , онда је

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{((1+i)^2)^2(1+i)}{(1-i)^2(1-i)} = \frac{(2i)^2(1+i)}{-2i(1-i)} = \frac{-4-4i}{-2-2i} = \frac{-4(1+i)}{-2(1+i)} = 2,$$

гдје је  $i$  имагинарна јединица.

Дакле, реални дио комплексног броја  $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$  је 2, док је имагинарни дио 0.

5. Полазна неједначина је дефинисана ако и само ако је  $2-x^2 \neq 0$ . Користећи формулу за разлику квадрата неједнакост  $2-x^2 \neq 0$  се може записати као

$$(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) \neq 0 \iff x \neq \sqrt{2} \text{ и } x \neq -\sqrt{2}.$$

Дакле, неједначина  $\frac{3}{2-x^2} \leq 1$  је дефинисана на скупу  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ .

Након пребацивања јединице на лијеву страну и одузимања полазна неједначина се своди на неједначину

$$\frac{x^2+1}{2-x^2} \leq 0.$$

Пошто је вриједност израза изнад разломачке црте већа од 0 за свако  $x \in \mathbb{R}$ , претходна неједнакост је мања од 0 ако и само ако је  $2-x^2 < 0$ , тј. ако је  $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) < 0$ . Рјешења ове неједначине су  $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ . Дакле, рјешења неједначине  $\frac{3}{2-x^2} \leq 1$  су  $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ .

6. Дата неједначина је дефинисана ако и само ако су испуњени сљедећи услови:

$$(a) \quad x + \frac{1}{2} > 0 \iff x > -\frac{1}{2},$$

$$(b) \quad x > 0.$$

Дакле, дата неједначина је дефинисана на скупу  $D = (0, +\infty)$ .

Користећи правило  $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ , дату неједначину можемо записати у облику

$$\log_{\frac{1}{2}} \left[ \left( x + \frac{1}{2} \right) \cdot x \right] \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}.$$

Пошто је број у основи логаритма мањи од 1, претходна неједначина је еквивалентна неједначини

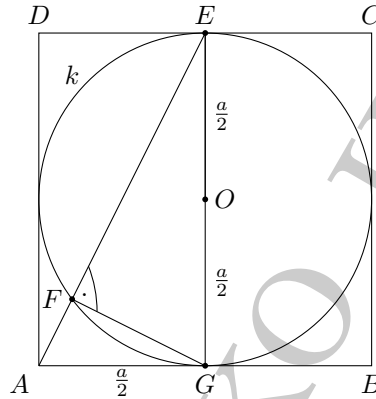
$$x^2 + \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}.$$

Након сређивања претходна неједначина се своди на неједначину

$$(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

Рјешења последње неједначине су  $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ . Пошто је полазна неједначина дефинисана на скупу  $D = (0, +\infty)$ , узимамо само рјешења из скупа  $[-1, \frac{1}{2}] \cap (0, +\infty)$ . Дакле, рјешења неједначине  $\log_{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{2}) + \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1$  су  $x \in (0, \frac{1}{2}]$ .

7. Означимо са  $k$  кружницу уписану у квадрат  $ABCD$ . Нека је  $O$  центар кружнице  $k$ ,  $E$  тачка у којој кружница  $k$  додирује страну  $CD$  квадрата  $ABCD$ , а  $F$  тачка у којој дуж  $AE$  сијече кружницу  $k$  (Слика 15). Означимо са  $G$  тачку у којој кружница  $k$  додирује дуж  $AB$  квадрата  $ABCD$ . Пошто уписана кружница додирује стране квадрата у њиховим средиштима, закључујемо да је  $|AG| = \frac{a}{2}$ . Познато је да је дужина полупречника уписане кружнице квадрата једнака половини дужине његове стране. Пошто је тачка  $O$  центар круга  $k$ , а тачке  $E$  и  $G$  леже на кружници  $k$  закључујемо да је  $|OE| = |OG| = \frac{a}{2}$ .



Слика 15: Задатак 7.

У правоуглом троуглу  $AGE$  дужина катете  $AG$  је  $\frac{a}{2}$ , док је дужина катете  $|GE| = |OG| + |OE| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$ . Примјеном Питагорине теореме на правоугли троугао  $AGE$  добијамо да је

$$|AE|^2 = |AG|^2 + |GE|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4},$$

одакле је  $|AE| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

Угао  $GFE$  је периферијски угао над пречником  $GE$  круга  $k$ , па је  $\angle GFE = \angle GFA = 90^\circ$ . То значи да је дуж  $GF$  висина на хипотенузу  $AE$  правоуглог троугла  $AGE$ . На основу овога закључујемо да површину правоуглог троугла  $AGE$  можемо израчунати на следећа два начина

$$P(AGE) = \frac{|AG| \cdot |GE|}{2} = \frac{|AE| \cdot |FG|}{2}.$$

Из овога добијамо да је

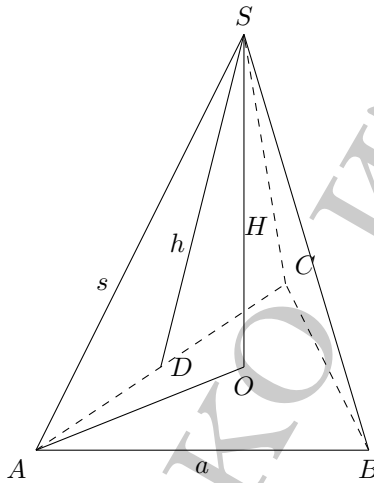
$$\frac{\frac{a}{2} \cdot a}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot |FG|}{2},$$

одакле је  $|FG| = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ . Примјеном Питагорине теореме на правоугли троугао  $FGE$  добијамо да је

$$|EF|^2 = |GE|^2 - |FG|^2 = a^2 - \frac{a^2}{5} = \frac{4a^2}{5},$$

одакле је  $|EF| = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

8. База правилне троуглаоне пирамиде је једнакокрајни троугао  $ABC$ . Нека је дужина његове стране  $a$ . Означимо са  $S$  врх пирамиде, а са  $O$  подножје висине  $H$  на основу те пирамиде. Тада је  $\angle AOS = 90^\circ$ . Пошто је тачка  $O$  уједно и тежиште једнакокрајног троугла  $ABC$ , онда је  $|AO| = \frac{2}{3}h_a$ , гдје је  $h_a$  висина једнакокрајног троугла  $ABC$ . Како је  $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , добијамо да је  $|AO| = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .



Слика 16: Задатак 8.

Нека је  $h$  висина бочне стране, тачка  $D$  подножје висине  $h$  на ивицу базе пирамиде и нека је  $s$  бочна ивица пирамиде  $SABC$ . Тада је  $\angle ADS = 90^\circ$  и  $|AD| = \frac{a}{2}$ .

Површина једне бочне стране пирамиде  $SABC$  је  $\frac{AC \cdot h}{2} = \frac{ah}{2}$ . У задатку је дато да је збир површина бочних страна пирамиде  $SABC$  3 пута већи од површине њене базе. На основу тога је

$$3 \frac{ah}{2} = 3 \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

одакле је

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Примјеном Питагорине теореме на правоугли троугао  $ADS$  добијамо да је

$$|AS|^2 = s^2 = |AD|^2 + h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2,$$

одакле је

$$s = a.$$

У задатку се тражи да израчунамо синус угла између бочне ивице и висине пирамиде. Дакле, потребно је израчунати синус угла  $ASO$ .

$$\sin \angle ASO = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a}{1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

9. Ако је  $A(x_1, y_1)$  тачка пресека правих  $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$  и  $(2m - 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$ , онда се она налази на објема правама, па на основу тога закључујемо да вриједи следећи систем једначина

$$\begin{aligned} mx_1 + (2m + 3)y_1 + m + 6 &= 0 \\ (2m - 1)x_1 + (m - 1)y_1 + m - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Пошто тачка  $A$  треба да се налази на  $y$ -оси, закључујемо да је  $x_1 = 0$ , па је претходни систем једначина еквивалентан систему

$$\begin{aligned} (2m + 3)y_1 + m + 6 &= 0 \\ (m - 1)y_1 + m - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Из друге једначине добијамо да је  $y_1 = \frac{2-m}{m-1}$ ,  $m \neq 1$ . Уврштавајући ову једнакост у прву једначину добијамо једначину

$$\frac{(2m + 3)(2 - m)}{m - 1} + m + 6 = 0.$$

Након сређивања претходна једначина се своди на квадратну једначину  $m^2 - 6m = 0$ , која је еквивалентна једначини  $m(m - 6) = 0$ . Рјешења ове једначине су  $m = 0$  и  $m = 6$ .

Потребно је још посматрати случај када је  $m = 1$ . За  $m = 1$  добијамо праве  $x + 5y + 7 = 0$  и  $x - 1 = 0$ . Пошто је права  $x - 1 = 0$  паралелна са  $y$ -осом, ове двије праве се сигурно не сијекну у тачки на  $y$ -оси.

Дакле, за  $m \in \{0, 6\}$  праве  $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$  и  $(2m - 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$  се сијекну у тачки која се налази на  $y$ -оси.

10. Посматрајмо петоцифрене бројеве облика  $\overline{ab6cd}$ . Број је дјелјив са 3 ако и само ако му је збир цифара дјелјив са 3. Дакле, бројеви облика  $\overline{ab6cd}$  су дјелјиви са 3 ако и само ако је збир  $a + b + 6 + c + d$  дјелјив са 3. Пошто 3 дијели 6, закључујемо да је збир  $a + b + 6 + c + d$  дјелјив са 3 ако и само ако је збир  $a + b + c + d$  дјелјив са 3. Дакле, број петоцифрених бројева дјелјивих са 3 којима је средња цифра 6 је исти као и број четвороцифрених бројева дјелјивих са 3. Најмањи четвороцифрен број је 1000, а највећи је 9999. Укупан број четвороцифрених бројева је  $9999 - 1000 + 1 = 9000$ . Од тих 9000 четвороцифрених бројева сваки трећи је дјелјивих са три. Одатле слиједи да је укупан број четвороцифрених бројева дјелјивих са три  $9000 : 3 = 3000$ . Дакле, на основу свега наведеног закључујемо да је број петоцифрених бројева дјелјивих са 3 којима је средња цифра 6 једнак 3000.

## Јул 2019.

## Задаци

1. Упростити израз

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2,$$

при чему је  $a$  реалан параметар.

2. Колико сладоледа поједе 25 ученика за 25 минута, ако 5 ученика поједе 5 сладоледа за 5 минута?

3. Одредити
- $f(f(x))$
- ако је
- $x \neq 2$
- и
- $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$
- .

4. Одредити вриједност израза

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2}$$

ако су  $x_1$  и  $x_2$  рјешења квадратне једначине  $x^2 - 2x + 4 = 0$ .

5. Одредити вриједност израза
- $\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^5$
- , при чему је
- $i$
- имагинарна јединица.

6. Одредити број рјешења тригонометријске једначине

$$\cos x \cos \frac{\pi}{5} + \sin x \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

у интервалу  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

7. У правоуглом троуглу дужина висине која одговара хипотенузи је 2 cm. Ако наведена висина дијели хипотенузу на одсјечке чије се дужине разликују за 3 cm, одредити површину тог троугла.

8. Праве чије су једначине
- $2x + y - 3 = 0$
- и
- $2x + y - 8 = 0$
- садрже двије странице квадрата. Одредити површину тог квадрата.

9. Одредити број шестоцифрених природних бројева који у свом запису имају бар једну цифру 1.

10. Одредити збир свих цјелобројних рјешења неједначине

$$\frac{x}{x+2} \leq \frac{1}{1-x}.$$

## Рјешења

1. Разликујемо два случаја.

Ако је  $a \geq 0$ , онда је  $|a| = a$ . У овом случају је

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2.$$

Ако је  $a < 0$ , онда је  $|a| = -a$ , па је у овом случају

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-(-a)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2.$$

Дакле, за све реалне вриједности параметра  $a$  је израз из задатка једнак  $a^2$ .

2. Број поједених сладоледа и број ученика су директно пропорционални, тј. ако у истом интервалу повећамо број ученика, сразмјерно томе повећаће се и број сладоледа које су они појели. Такође, број сладоледа је директно пропорционалан са временским интервалом, тј. повећањем интервала, исти број ученика ће појести сразмјерно већи број сладоледа.

Стога, ако 5 пута повећамо број ученика, 5 пута ће се повећати и број поједених сладоледа, па ће  $5 \cdot 5 = 25$  ученика за 5 минута појести  $5 \cdot 5 = 25$  сладоледа. Са друге стране, повећањем броја минута 5 пута, број поједених сладоледа ће се такође повећати 5 пута, па ће 25 ученика за  $5 \cdot 5 = 25$  минута појести  $5 \cdot 25 = 125$  сладоледа.

3.

$$f(f(x)) = \frac{2 \cdot \frac{2x+1}{x-2} + 1}{\frac{2x+1}{x-2} - 2} = \frac{\frac{4x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2x+1-2x+4}{x-2}} = \frac{5x}{5} = x, \quad x \neq 2.$$

4. Како су  $x_1$  и  $x_2$  рјешења квадратне једначине  $x^2 - 2x + 4 = 0$ , користећи Вијетове формуле добијамо да вриједје једнакости  $x_1 + x_2 = 2$  и  $x_1x_2 = 4$ . Користећи претходне двије једнакости и формулу за збир кубова  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$  добијамо да вриједје сљедеће једнакости:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = 2(2^2 - 3 \cdot 4) = 2 \cdot (-8) = -16, \\ x_1^2x_2 + x_1x_2^2 &= x_1x_2(x_1 + x_2) = 4 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

Одатле је

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2x_2 + x_1x_2^2} = \frac{-16}{8} = -2.$$

5. Како је

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2} = 1+i$$

и како је

$$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (1+2i+i^2)^2 = (2i)^2 = -4,$$

то је

$$\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^5 = (1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = -4(1+i).$$

6. Користећи адicione формуле за косинус разлике, задана тригонометријска једначина може се записати на следећи начин

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

Рјешења ове једначине задовољавају једнакости

$$x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

тј.  $x = \frac{8}{15}\pi + 2k\pi$ , за  $k \in \mathbb{Z}$  и  $x = -\frac{2}{15}\pi + 2k\pi$ , за  $k \in \mathbb{Z}$ .

Уврштавањем вриједности за  $k$ , закључујемо да се од свих добијених рјешења једино рјешење  $x = -\frac{2}{15}\pi$  налази у интервалу  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

7. Означимо висину која одговара хипотенузи са  $h_c$ , подножје те висине на хипотенузу са  $D$ , а одсјечке које она прави на хипотенузи са  $x$  и  $y$  (Слика 17).

**Први начин.** Очигледно је  $c = x + y$ , а из задатка је  $h_c = 2$ . Површина правоуглог троугла рачуна се по формули

$$P = \frac{ch_c}{2} = \frac{c \cdot 2}{2} = c.$$

Користећи Питагорину теорему на правоугле троуглове  $CAD$  и  $CDB$  добијамо да вриједи једнакости  $b^2 = 4 + x^2$  и  $a^2 = 4 + y^2$ . Примјеном Питагорине теореме на правоугли троугао  $CAB$  добијамо да је  $c^2 = a^2 + b^2$ . Сабирајући једнакости одозго добијамо

$$c^2 = 8 + x^2 + y^2.$$

У задатку нам је задано да се  $x$  и  $y$  разликују за  $3 \text{ cm}$ , па можемо претпоставити да је  $x = 3 + y$ . Како је  $c = x + y = 3 + 2y$ , то је  $c^2 = 9 + 12y + 4y^2$ . Из  $c^2 = 8 + x^2 + y^2 = 8 + (3 + y)^2 + y^2 = 2y^2 + 6y + 17$  и претходне једнакости добијамо квадратну једначину

$$2y^2 + 6y + 17 = 4y^2 + 12y + 9$$

односно

$$2y^2 + 6y - 8 = 0$$

чија су рјешења  $y = -4$  или  $y = 1$ . Пошто је  $y$  дужина странице у троуглу, то је једино могуће  $y = 1$ , одакле је  $x = 4$ . Дакле, површина посматраног троугла  $CAB$  је  $x + y = 5 \text{ cm}^2$ .

**Други начин.** Из текста задатка је  $h_c = 2$  и претпоставимо да је  $x = y + 3$ . Површина правоуглог троугла рачуна се по формули

$$P = \frac{ch_c}{2} = \frac{c \cdot 2}{2} = c = x + y.$$

Ако означимо углове  $CAD = \alpha$ ,  $CBD = \beta$ , а како из троугла  $ABC$  слиједи да је  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , то су углови  $BCD = \alpha$ ,  $ACD = \beta$ . Одатле можемо да закључимо да су троуглови  $ADC$  и  $CDB$  слични, јер су то правоугли троуглови

са одговарајућим угловима међусобно једнаким. Из сличности тих троуглова слиједи однос

$$|AD| : |CD| = |CD| : |BD|,$$

тј.

$$x : 2 = 2 : y,$$

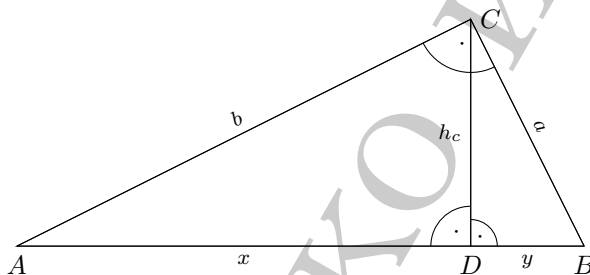
односно

$$xy = 4.$$

Слиједи да је

$$(y + 3)y = y^2 + 3y = 4.$$

Рјешења ове квадратне једначине су  $y = -4$  или  $y = 1$ , а како је  $y$  дужина странице у троуглу, то је једино могуће  $y = 1$ , одакле слиједи да је  $x = 4$ . Како је  $P = x + y$ , то је површина посматраног троугла  $CAB$  једнака  $5 \text{ cm}^2$ .



Слика 17: Задатак 7.

8. Задане једначине правих записане у експлицитном облику су

$$p_1 : y = -2x + 3,$$

$$p_2 : y = -2x + 8.$$

Како су коефицијенти праваца ових правих једнаки ( $k = -2$ ), то су дате праве паралелне и на њима леже двије наспрамне странице посматраног квадрата. Дужина странице тог квадрата је једнака удаљености између те двије праве. Како обје праве сијеку  $x$ -осу, уочимо нпр. тачку која лежи у пресеку праве  $p_1$  и  $x$ -осе. Рјешавајући једначину

$$-2x + 3 = 0,$$

добивамо да је њихова пресјечна тачка  $A(\frac{3}{2}, 0)$ .

Посматрајмо праву  $q$  која пролази кроз тачку  $A$  и нормална је на праве  $p_1$  и  $p_2$  (Слика 18). Коефицијент праваца те праве је  $-\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ . Како права  $q$  садржи тачку  $A$ , то је њена једначина

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{2}),$$

тј.

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Пресјечна тачка праве  $p_2$  и праве  $q$  добија се рјешавањем система једначина

$$y = -2x + 8$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4},$$

тј. рјешавањем једначине

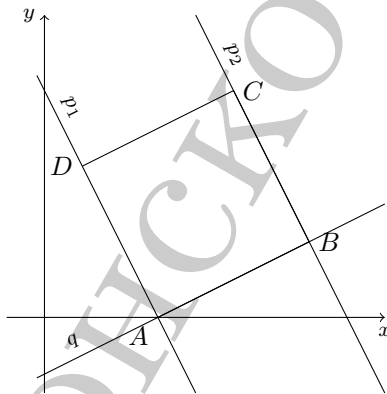
$$-2x + 8 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Добијамо да је рјешење те једначине  $x = \frac{7}{2}$ , одакле слиједи да је  $y = 1$ , односно пресјечна тачка је  $B(\frac{7}{2}, 1)$ .

Дужина странице квадрата  $a$  је једнака удаљености између тачака  $A$  и  $B$ , па је

$$a = d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}.$$

Дакле, површина посматраног квадрата је  $P = 5$ .



Слика 18: Задатак 8.

**9.** Број шестоцифрених бројева који у свом запису имају бар једну цифру 1 добијамо када од укупног броја свих шестоцифрених бројева одузмемо број шестоцифрених бројева који у свом запису немају цифру 1.

Укупан број шестоцифрених бројева је  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5$ , с обзиром на то да на првом мјесту произвољног шестоцифреног броја може да стоји било која цифра осим 0, а на свим преосталим може да стоји било која цифра.

Број свих шестоцифрених бројева који у свом запису немају цифру 1 је  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^5$ , јер за прву позицију тог броја можемо узети било коју цифру која није 0 ни 1, а за преостале можемо да узмемо било коју цифру која није 1. Дакле, број шестоцифрених бројева који у свом запису имају бар једну цифру 1 је  $9 \cdot 10^5 - 8 \cdot 9^5 = 427608$ .

**10.** Пребацавањем израза са десне на лијеву страну неједнакости добијамо неједначину

$$\frac{x}{x+2} - \frac{1}{1-x} \leq 0.$$

Посматрана неједначина еквивалентна је неједначини

$$\frac{x(1-x) - (x+2)}{(x+2)(1-x)} \leq 0.$$

Дакле, треба да ријешимо неједначину

$$\frac{-x^2 - 2}{(x+2)(1-x)} \leq 0.$$

Множећи претходну неједначину са  $-1$ , добијамо да је она еквивалентна неједначини

$$\frac{x^2 + 2}{(x+2)(1-x)} \geq 0.$$

Израз  $x^2 + 2$  је увијек позитиван, па су рјешења претходне неједначине оне вриједности  $x$  које задовољавају услов

$$(x+2)(1-x) > 0,$$

јер израз у имениоцу мора да буде различит од  $0$ . Добијену квадратну неједначину лако можемо да ријешимо цртајући таблицу:

	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$x + 2$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$1 - x$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$(x + 2)(1 - x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

Рјешења чини скуп вриједности  $(-2, 1)$ , а како том интервалу припадају само цијели бројеви  $-1$  и  $0$ , то је збир цјелобројних рјешења неједначине из задатка једнак  $-1$ .

## Септембар 2019.

## Задаци

1. Израчунати вриједност израза

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}.$$

2. Израчунати 40% вриједности броја  $5x$ , ако 30% вриједности броја  $2x$  износи 2019.

3. Ако је  $f(x) = \frac{x}{3} - 1$ , израчунати  $f(3x + 1)$ .

4. Израчунати збир свих рјешења експоненцијалне једначине

$$2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

5. Израчунати  $\operatorname{tg} \alpha$  ако је  $\cos \alpha = -\frac{40}{41}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

6. Израчунати збир реалног и имагинарног дијела комплексног броја

$$\frac{-6 - 2i}{(1 - i)^3},$$

гдје је  $i$  имагинарна јединица.

7. У троуглу  $ABC$  је  $\angle CAB = 60^\circ$  и  $|AB| = 2 \cdot |CA|$ . Израчунати обим троугла, ако је његова површина једнака  $18\sqrt{3}$ .

8. Дата је кружница чија је једначина  $x^2 + y^2 = 169$ . Израчунати дужину њене тетиве чије је средиште тачка  $S(3, 4)$ .

9. Израчунати број непарних троцифрених природних бројева чије су све цифре различите.

10. Ријешити неједначину

$$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}.$$

## Рјешења

1. Сабирањем разломака у првој загради датог израза добијамо

$$\frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}} = \frac{1-\sqrt{7}+1+\sqrt{7}}{(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})}.$$

Примјењујући формулу за разлику квадрата добијамо да је именилац у претходном изразу једнак  $(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7}) = 1^2 - \sqrt{7}^2 = -6$ . Дакле, израз у првој загради је једнак  $\frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$ . Уврштавањем добијене вриједности у дати израз добијамо

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2} \\ = \left(-\frac{3}{1}\right)^2 + (1+\sqrt{7})^2 + (1-\sqrt{7})^2. \end{aligned}$$

Примјеном формуле за квадрат збира и квадрат разлике на последња два сабирка добијамо

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{7})^2 &= 1 + 2\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 1 + 2\sqrt{7} + 7 = 8 + 2\sqrt{7}, \\ (1-\sqrt{7})^2 &= 1 - 2\sqrt{7} - (\sqrt{7})^2 = 1 - 2\sqrt{7} + 7 = 8 - 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Сходно томе, вриједност датог израза је

$$9 + 8 + 2\sqrt{7} + 8 - 2\sqrt{7} = 25.$$

2. Из услова задатка имамо да је 30% броја  $2x$  једнако 2019, што значи да је  $0,3 \cdot 2x = 2019$ . Рјешавањем претходне једначине добијамо да је

$$x = 2019 \cdot \frac{100}{30} \cdot \frac{1}{2} = 3365.$$

Стога, 40% броја  $5x$  износи

$$\frac{40}{100} \cdot 5x = \frac{4}{10} \cdot 5 \cdot 3365 = 6730.$$

3. Како је  $f(x) = \frac{x}{3} - 1$ , имамо да је

$$f(3x+1) = \frac{3x+1}{3} - 1 = \frac{3x+1-3}{3} = \frac{3x-2}{3} = x - \frac{2}{3}.$$

4. Како је  $2 \cdot (2^2)^x - 17 \cdot 2^x + 8 = 2 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8$ , дата једначина се своди на

$$(2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Потребно је одредити број  $x$  који задовољава дату једнакост. Означимо непознати број  $2^x$  са  $t$ . Непознати број  $t$  задовољава једнакост

$$2t^2 - 17t + 8 = 0,$$

чија су рјешења

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4}.$$

Због тога број  $2^x = t$  може да буде или  $\frac{1}{2}$  или 8. Ако је  $2^x = \frac{1}{2}$  добијамо да је  $x = -1$ . Ако је  $2^x = 8$ , добијамо да тада  $x = 3$ . Дакле, збир рјешења дате једначине је 2.

**5.** Како је  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , то је за одређивање вриједности  $\operatorname{tg} \alpha$  довољно одредити вриједност  $\sin \alpha$ . Из неједнакости  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  закључујемо да је број  $\sin \alpha$  негативан број. Сходно томе, из основног тригонометријског идентитета слиједи да је

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1600}{1681}} = -\sqrt{\frac{81}{1681}} = -\frac{9}{41}.$$

Користећи претходно добијамо да је

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{9}{41}}{-\frac{40}{41}} = \frac{9}{40}.$$

**6.** Користећи формулу за куб разлике и чињенице да је  $i^2 = -1$  и  $i^3 = -i$  добијамо да је именилац у датом разломку једнак

$$(1 - i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3 = 1 - 3i - 3 + i = -2 - 2i,$$

из чега закључујемо да је дати број једнак  $\frac{-6-2i}{-2-2i}$ . Множењем бројиоца и имениоца датог комплексног броја са  $-2 + 2i$  добијамо

$$\frac{-6 - 2i}{-2 - 2i} \cdot \frac{-2 + 2i}{-2 + 2i} = \frac{(-6 - 2i)(-2 + 2i)}{(-2)^2 + 2^2} = \frac{16 - 8i}{8} = 2 - i.$$

Из претходне једнакости видимо да је реални дио датог броја једнак 2, а имагинарни једнак -1. Сходно томе, збир реалног и имагинарног дијела је једнак 1.

**7.** Површина троугла  $ABC$  се може израчунати формулом

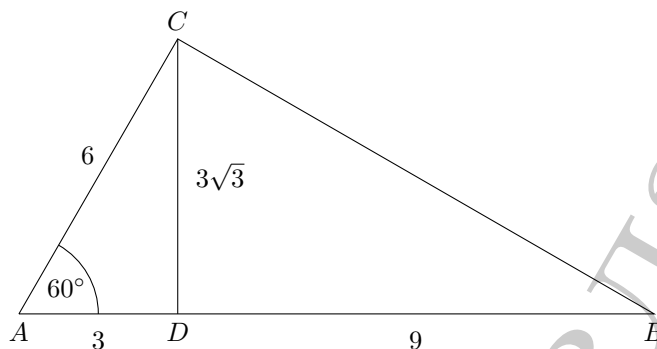
$$P = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \sin \angle CAB.$$

Користећи задане податке у задатку имамо

$$\frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \sin \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 2 |AC|^2 \sin 60^\circ = |AC|^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

Из претходне једнакости закључујемо да је  $|AC| = 6$ , те је  $|AB| = 2 \cdot |AC| = 12$ . Означимо са  $D$  подножје висине из тачке  $C$  на страницу  $AB$  (Слика 19). Тада из правоуглог троугла  $ADC$  имамо да је

$$\cos 60^\circ = \frac{|AD|}{|AC|},$$



Слика 19: Задатак 7.

односно

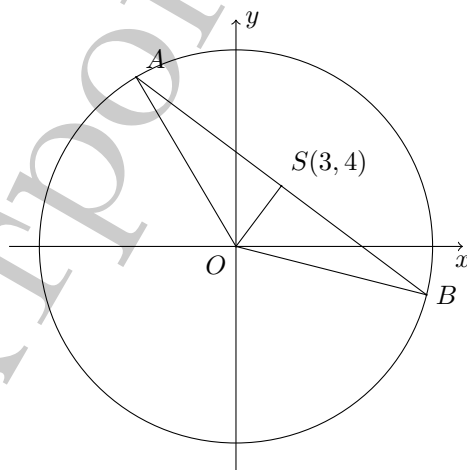
$$|AD| = |AC| \cdot \cos 60^\circ = 3.$$

Како је  $|AB| = 12$ , то добијамо да је  $|BD| = 9$ . Такође, из правоуглог троугла  $ADC$  добијамо да је  $|DC| = 6 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ . Користећи Питагорину теорему у троуглу  $BCD$  добијамо да је

$$|BC| = \sqrt{|CD|^2 + |DB|^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 9^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

Дакле, обим датог троугла је  $6 + 12 + 6\sqrt{3} = 18 + 6\sqrt{3}$ .

8. Из једначине кружнице се види да је њен центар тачка  $(0, 0)$  и да је дужина њеног полупречника  $\sqrt{169} = 13$ . Нека је  $AB$  тетива кружнице чије је средиште тачка  $S$  (Слика 20). Дужи  $AO$  и  $BO$  су полупречници кружнице,



Слика 20: Задатак 8.

због чега имају исту дужину. Тачка  $S$  је средиште дужи  $AB$  па је  $|AS| = |SB|$ .

Троуглови  $AOS$  и  $BOS$  имају заједничку страну и одговарајуће стране једнаких дужина, па закључујемо да су поменути троуглови подударни. Из подударности можемо да закључимо да је  $\angle OSB = \angle OSA$ . Са друге стране имамо да је

$$\angle ASO + \angle OSB = \angle ASB = 180^\circ.$$

Дакле, углови  $\angle ASO$  и  $\angle OSB$  су једнаки и њихов збир је једнак  $180^\circ$ . Закључујемо да су мјере оба угла  $90^\circ$ . Удаљеност тачке  $S(3, 4)$  до центра кружнице је

$$\sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5.$$

Дакле, дужина дужи  $OS$  је једнака 5. Тачка  $B$  се налази на кружници, па је дужина дужи  $OB$  једнака дужини полупречника, тј. 13. Користећи се Питагорином теоремом у правоуглом троуглу  $OBS$  имамо да је

$$|SB| = \sqrt{|OB|^2 - |OS|^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

Како је  $S$  средиште тетиве  $AB$  то имамо да је дужина дужи  $AB = 24$ .

9. Погледати задатак 7. на пријемном испиту који је одржан у јулу 2016.

10. **Први начин.** Ријешимо прво неједнакост при услову  $x + 1 > 0$ , тј.  $x > -1$ . Тада је неједнакост могуће помножити са  $3(x + 1)$  при чему се знак у неједнакости неће промијенити. Множењем добијамо неједнакост  $3 < 2(x + 1)$ , која се даље своди на  $3 < 2x + 2$ , тј.

$$\frac{1}{2} < x.$$

У другом случају имамо да је  $x + 1 < 0$ , тј.  $x < -1$ . Тада је разломак на лијевој страни неједнакости негативан, па је неједнакост задовољена јер се на десној страни налази позитиван број. Како се израз  $x + 1$  јавља испод разломачке црте, то он не може бити једнак нули, па  $x = -1$  не разматрамо. Сумирајући претходно добијено, закључујемо да је рјешење неједначине свако  $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ .

**Други начин.** Дату једначину је могуће написати у еквивалентном облику

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3} = \frac{1-2x}{3(x+1)} < 0.$$

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
$1 - 2x$	+	+	+	0	-
$x + 1$	-	0	+	+	+
$\frac{1-2x}{3(x+1)}$	-	н.д.	+	0	-

Табела 1: Задатак 10.

Из табеле 1 добијамо да је рјешење дате неједначине свако  $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ .

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

## Јун 2020.

## Задачи

1. Израчунати вриједност израза

$$\left( \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2a} - \sqrt{b}} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{b}{4a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \right), \quad a > 0, b > 0, b \neq 2a.$$

2. Ријешити неједначину  $\frac{1}{5-x} + \frac{2}{x+1} < 1$ .

3. Роба је у току године два пута поскупила за по 10%. За колико је цијена робе на крају године већа од цијене робе на почетку године?

4. За које  $m \in \mathbb{R}$  су рјешења квадратне једначине  $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 12 = 0$  реални бројеви?

5. Ријешити експоненцијалну једначину  $2^x + 5 \cdot 3^{x-2} = 3^x - 2^{x-1}$ .

6. Ако је  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$  и  $\alpha \in (0, \pi)$ , израчунати вриједност израза  $\frac{5 \cos \alpha - 3}{10 \sin \alpha + 1}$ .

7. Ако је  $i$  имагинарна јединица и  $z = \frac{(1+i)^{2020}}{(1-i)^{2019}}$ , одредити имагинарни дио броја  $z$ .

8. Дате су тачке  $A(7, -1)$  и  $B(2, 3)$  и права  $p: 4x + y = 1$ . Одредити једначину праве која пролази кроз средиште дужи  $AB$  и паралелна је правој  $p$ .

9. Дужина средње линије трапеза износи  $m = 10$  cm. Ако она дијели површину трапеза на  $P_1$  и  $P_2$  које су у размјери  $P_1 : P_2 = 3 : 5$ , одредити дужине његових основица.

10. Одредити број петоцифрених природних бројева у чијем запису се цифра нула појављује тачно два пута.

## Рјешења

1. Након одузимања разломака у загради, дати израз своди се на израз

$$\frac{(\sqrt{2a} - \sqrt{b})^2 - (\sqrt{2a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{2a} + \sqrt{b})(\sqrt{2a} - \sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{b^2} - 2\sqrt{a^2}}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}.$$

Због услова  $a > 0$  и  $b > 0$  вриједи  $\sqrt{b^2} = b$  и  $\sqrt{a^2} = a$ . Користећи формуле за квадрат збира и разлику квадрата претходни израз се може записати као

$$\begin{aligned} & \frac{2a - 2\sqrt{2ab} + b - 2a - 2\sqrt{2ab} - b}{2a - b} \cdot \frac{b - 2a}{2\sqrt{a}\sqrt{b}} \\ &= \frac{4\sqrt{2ab}}{b - 2a} \cdot \frac{b - 2a}{2\sqrt{a}\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{b}}{2\sqrt{a}\sqrt{b}} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Дата неједначина се након сређивања своди на

$$\frac{x + 1 + 10 - 2x}{(5 - x)(x + 1)} - 1 < 0,$$

а иста је еквивалентна са

$$\frac{-x + 11 - 5x + x^2 - 5 + x}{(5 - x)(x + 1)} < 0,$$

односно са

$$\frac{(x - 2)(x - 3)}{(5 - x)(x + 1)} < 0.$$

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 2)$	$2$	$(2, 3)$	$3$	$(3, 5)$	$5$	$(5, \infty)$
$x - 2$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$5 - x$	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{(x-2)(x-3)}{(5-x)(x+1)}$	-	н.д.	+	0	-	0	+	н.д.	-

Табела 2: Задатак 2.

Из Табеле 2 добијамо да је рјешење дате неједначине скуп  $(-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$ .

3. Означимо са  $x$  цијену робе на почетку године. Након првог поскупљења за 10% роба је имала цијену

$$x + \frac{1}{10}x = \frac{11}{10}x.$$

Након другог поскупљења за 10%, роба је имала цијену

$$\frac{11}{10}x + \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{10}x = \frac{121}{100}x.$$

Дакле, цијена робе на крају године је за 21% већа од цијене робе на почетку године.

4. Подсјетимо се да квадратна једначина  $ax^2 + bx + c = 0$  има реална рјешења ако и само ако је њена дискриминанта  $D = b^2 - 4ac \geq 0$ . Дакле, да би једначина  $x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 12 = 0$  имала реална рјешења, мора бити

$$4(m + 2)^2 - 4(m^2 + 12) = 16m - 32 \geq 0,$$

односно  $m \geq 2$ .

5. Уочимо да се једначина

$$2^x + 5 \cdot 3^{x-2} = 3^x - 2^{x-1}$$

након дијелења са  $3^{x-2}$  своди на једначину

$$\frac{2^{x-2} \cdot 2^2}{3^{x-2}} + 5 = 3^2 - \frac{2^{x-2} \cdot 2}{3^{x-2}},$$

која је еквивалентна са једначином

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 5 = 9 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}.$$

Сређивањем добијамо једначину

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = \frac{2}{3},$$

тј. једначину  $x - 2 = 1$ , а њено рјешење је  $x = 3$ .

6. Користећи чињеницу да је  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ , добијамо да вриједи

$$\sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}})} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

и

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}})}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}})} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Како је  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$ , то је

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot 3}{1 + 9} = \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{1 - 9}{1 + 9} = -\frac{4}{5}.$$

Зато је

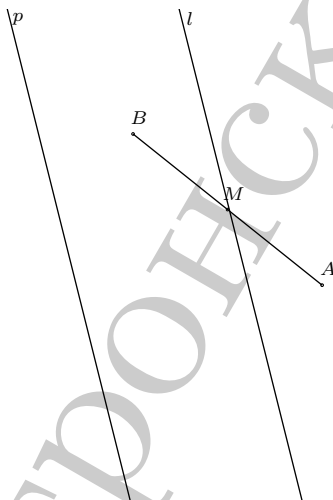
$$\frac{5 \cos \alpha - 3}{10 \sin \alpha + 1} = \frac{-4 - 3}{6 + 1} = -\frac{7}{7} = -1.$$

7. Уочимо да вриједи  $(1+i)^2 = 2i$  и  $(1-i)^2 = -2i$ . Како је  $i^{4k} = 1, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , то је комплексан број  $z$  једнак

$$\begin{aligned} & \frac{((1+i)^2)^{1010}}{((1-i)^2)^{1009}(1-i)} \\ &= \frac{(2i)^{1010}}{(-2i)^{1009}(1-i)} \\ &= \frac{2^{1010} \cdot i^{1008} \cdot i^2}{-2^{1009} \cdot i^{1008} \cdot i \cdot (1-i)} \\ &= \frac{2}{i(1-i)} \\ &= \frac{2i(1+i)}{-1(1-i^2)} \\ &= 1-i. \end{aligned}$$

Дакле, имагинарни дио комплексног броја  $z$  једнак је  $-1$ .

8. Означимо са  $l : y - y_0 = k(x - x_0)$  непознату праву (Слика 21). Како су праве  $p$  и  $l$  паралелне, то су њихови коефицијенти правца једнаки. Коефицијент правца праве  $p : y = -4x + 1$  је  $k = -4$ . Координате средишта дужи  $AB$



Слика 21: Задатак 8.

су

$$x_0 = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2} \text{ и } y_0 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

На основу свега добијеног имамо да је једначина праве  $l$

$$y - 1 = -4 \left( x - \frac{9}{2} \right),$$

односно

$$y = -4x + 19.$$

9. Нека је  $ABCD$  траpez са основицама  $a$  и  $b$  и средњом линијом дужине  $m = 10$ . Како средња линија полови висину трапеza и како је средња линија паралелна основицама трапеza (Слика 22), имамо да она дијели полазни траpez на два трапеza чије су површине

$$P_1 = \frac{b+m}{2} \cdot \frac{h}{2} \text{ и } P_2 = \frac{m+a}{2} \cdot \frac{h}{2}.$$

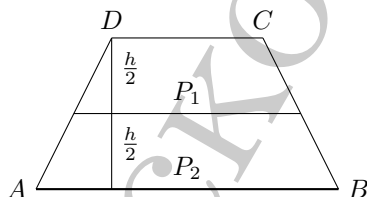
Како је дато да је  $m = \frac{a+b}{2} = 10$ , имамо да је  $b = 20 - a$ . Из услова задатка  $P_1 : P_2 = 3 : 5$  имамо да вриједи

$$\frac{\frac{10+b}{2} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{10+a}{2} \cdot \frac{h}{2}} = \frac{3}{5},$$

односно

$$\frac{30 - a}{10 + a} = \frac{3}{5}.$$

Последња једначина еквивалентна је једначини  $8a = 120$ , одакле добијамо да је  $a = 15$  cm, а онда је  $b = 5$  cm.



Слика 22: Задатак 9.

10. Треба да одредимо број петоцифрених бројева код којих се 0 појављује тачно два пута, али како се цифра 0 не може наћи на првом мјесту, то је број начина да одредимо мјеста за двије 0 једнак  $\binom{4}{2}$ . На преостала три мјеста може се одабрати било која од цифара из скупа  $\{1, 2, \dots, 9\}$ , тако да је број начина да одаберемо цифре за преостала три мјеста једнак  $9 \cdot 9 \cdot 9$ . Тражени број петоцифрених бројева код којих се цифра 0 јавља тачно два пута једнак је

$$\binom{4}{2} \cdot 9^3 = 6 \cdot 9^3 = 4374.$$

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

## Септембар 2020.

## Задачи

1. Израчунати вриједност израза

$$\frac{16 - 1}{16^{\frac{3}{4}} + 16^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{16^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot 16^{\frac{1}{4}} + 1.$$

2. Ако је функција  $f$  дата са  $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2}$ , израчунати

$$f(-f(-x)), \text{ за } x \neq 2.$$

3. У фабрици су 35% радника жене, а мушких радника има за 252 више него женских радника. Израчунати укупан број радника у фабрици.
4. Одредити вриједности параметра  $k \in \mathbb{R}$  за које је једно рјешење квадратне једначине  $8x^2 - 6x + 9k^2 = 0$  једнако квадрату другог рјешења.
5. Ријешити експоненцијалну једначину  $3^{x+2} + 3^{x+1} + 2 \cdot 3^x = 126$ .
6. Ако је  $\sin \alpha - \cos \alpha = p$ , израчунати  $\sin 2\alpha$ .
7. Ријешити логаритамску једначину  $\log(x + 2) + \log(x - 7) = 2 \cdot \log(x - 4)$ .
8. Одредити једначину праве која сијече праве чије су једначине  $x + y + 3 = 0$  и  $2x - y - 5 = 0$  у тачкама  $A$  и  $B$ , при чему је тачка  $M(1, 1)$  средиште дужи  $AB$ .
9. У једнакокраком трапезу дужина средње линије је  $m = 10$  cm и дужина дијагонале је  $d = 20$  cm. Израчунати површину овог трапеза.
10. Од 8 математичара и 6 програмера треба формирати комисију од 5 чланова у којој ће бити бар 2 математичара и бар један програмер. На колико начина се то може урадити?

## Рјешења

1.

$$\begin{aligned} & \frac{16-1}{16^{\frac{3}{4}}+16^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{16^{\frac{1}{2}}+16^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{2}}+1} \cdot 16^{\frac{1}{4}}+1 \\ &= \frac{15}{16^{\frac{1}{2}}(16^{\frac{1}{4}}+1)} \cdot \frac{16^{\frac{1}{4}}(16^{\frac{1}{4}}+1)}{16^{\frac{1}{2}}+1} \cdot 16^{\frac{1}{4}}+1 \\ &= \frac{15}{16^{\frac{1}{2}}+1} + 1 = \frac{15}{\sqrt{16}+1} + 1 = 4 \end{aligned}$$

2. Уочимо да је за  $x \neq -2$ 

$$f(-x) = \frac{-2x+1}{-x-2} = \frac{2x-1}{x+2}$$

и

$$-f(-x) = \frac{1-2x}{x+2}.$$

На основу претходно наведеног имамо да вриједи једнакост

$$f(-f(-x)) = f\left(\frac{1-2x}{x+2}\right) = \frac{2\frac{1-2x}{x+2}+1}{\frac{1-2x}{x+2}-2} = \frac{2-4x+x+2}{\frac{1-2x-2x-4}{x+2}} = \frac{4-3x}{-3-4x},$$

за  $x \neq -\frac{3}{4}$ .

3. Погледати задатак 3. на пријемном испиту одржаном у септембру 2016.

4. Нека су  $x_1$  и  $x_2$  рјешења посматране једначине и нека је  $x_2 = x_1^2$ . На основу Вијетових формула имамо да вриједи

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{4} \text{ и } x_1 x_2 = \frac{9}{8} k^2,$$

односно  $x_1$  је рјешење квадратне једначине

$$x_1^2 + x_1 - \frac{3}{4} = 0.$$

Након рјешавања те једначине видимо да мора бити  $x_1 = \frac{1}{2}$  или  $x_1 = -\frac{3}{2}$ . У случају да је  $x_1 = -\frac{3}{2}$ , имали бисмо да је  $x_2 = \frac{9}{4}$ , а  $x_1 x_2 = -\frac{27}{8} = \frac{9}{8} k^2$ , што је немогуће, јер је број  $\frac{9}{8} k^2$  ненегативан за свако  $k \in \mathbb{R}$ . Закључујемо да је

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ и } x_2 = \frac{1}{4},$$

па је

$$\frac{9}{8} k^2 = \frac{1}{8},$$

а овај услов вриједи за  $k = \pm \frac{1}{3}$ .

5. Уочимо да су слjedeће једначине еквивалентне

$$3^2 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^x = 126,$$

$$3^x(9 + 3 + 2) = 126,$$

$$3^x \cdot 14 = 126,$$

$$3^x = 9,$$

одакле мора бити  $x = 2$ .

6. Квадрирајући полазну једнакост добијамо да вриједи

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = p^2.$$

Користећи познате тригонометријске идентитете

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ и } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

добијамо да је

$$1 - \sin 2\alpha = p^2,$$

тј. вриједи

$$\sin 2\alpha = 1 - p^2.$$

7. Да би полазна једначина имала смисла мора бити  $x > -2$ ,  $x > 7$  и  $x > 4$ , односно мора бити  $x > 7$ . Користећи позната својства логаритамске функције

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy, \quad x, y > 0, a > 0, a \neq 1,$$

$$n \log_a x = \log_a x^n, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N},$$

имамо да је полазна једначина еквивалентна са

$$\log(x+2)(x-7) = \log(x-4)^2.$$

Њена рјешења добијамо рјешавајући једначину

$$(x+2)(x-7) = (x-4)^2,$$

а њено рјешење је  $x = 10$ .

8. Нека је  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$ . Подсјетимо се да се координате средишта  $M(x_M, y_M)$  дужи  $AB$  рачунају по формули

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ и } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Како је  $M(1, 1)$ , имамо да вриједје слjedeће једнакости:

$$x_A + x_B = 2 \text{ и } y_A + y_B = 2. \quad (1)$$

Пошто тачка  $A$  припада правој  $p$  чија је једначина  $x + y + 3 = 0$ , а тачка  $B$  припада правој  $q$  чија је једначина  $2x - y - 5 = 0$ , то вриједје једнакости

$$x_A + y_A + 3 = 0 \text{ и } 2x_B - y_B - 5 = 0. \quad (2)$$

Дакле, непознате координате тачака  $A$  и  $B$  су рјешење система једначина (1), (2).

Из (1) имамо да је  $x_A = 2 - x_B$  и  $y_A = 2 - y_B$ , одакле након уврштавања у (2) добијамо да вриједи систем

$$7 - x_B - y_B = 0 \text{ и } 2x_B - y_B - 5 = 0.$$

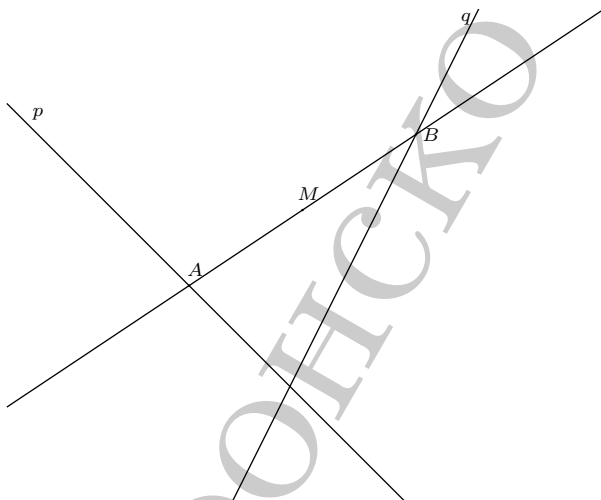
Рјешавајући овај систем закључујемо да мора бити  $x_B = 4$  и  $y_B = 3$ . Непосредно добијамо да је  $x_A = -2$  и  $y_A = -1$ .

Позната формула за једначину праве кроз двије тачке даје нам да тражена права кроз тачке  $A$  и  $B$  има једначину

$$y - 3 = \frac{3 + 1}{4 + 2}(x - 4),$$

односно

$$2x - 3y + 1 = 0.$$



Слика 23: Задатак 8.

9. Нека је  $ABCD$  једнакокраки траpez чија је средња линија дужине 10 cm и дијагонала дужине 20 cm. Означимо са  $D'$  подножје висине из тјемева  $D$  на основицу  $AB$ , а са  $C'$  подножје висине из тјемева  $C$  на основицу  $AB$ . Како је  $|C'D'| = |CD|$ , те како се ради о једнакокраком траpezу, дужина дужи  $AD'$  која је једнака разлици дужина дужи  $AB$  и  $D'B$  мора бити  $|AD'| = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = m$  (Слика 23). Како је троугао  $AD'D$  правоугли, може да се примијени Питагорина теорема на тај троугао. Вриједи, дакле,

$$m^2 + h^2 = d^2,$$

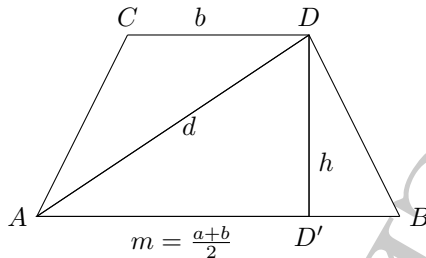
односно

$$h = 10\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Како је формула за површину трапеза једнака

$$P = m \cdot h,$$

закључујемо да је  $P = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .



Слика 24: Задатак 9.

**10.** Да бисмо формирали комисију са 5 чланова у којој су бар два математичара и бар један програмер, неопходно је формирати комисију у којој су или 2 математичара и 3 програмера, или 3 математичара и 2 програмера или 4 математичара и 1 програмер. Број начина да одаберемо 2 математичара од њих 8 и 3 програмера од њих 6 једнак је  $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3}$ . Слично, број начина да формирамо комисију са 3 математичара од њих 8 и 2 програмера од њих 6 је  $\binom{8}{3} \cdot \binom{6}{2}$ , а број начина да се формира комисија са 4 математичара од њих 8 и једним програмером од њих 6 је  $\binom{8}{4} \cdot \binom{6}{1}$ . Тражено рјешење представља збир добијених вриједности, односно

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} + \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{2} + \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{1} = \frac{8 \cdot 7}{2!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} + 6 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 1820.$$

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

**Јун 2021.****Задачи**

1. Нека је  $a = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$  и  $b = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ . Израчунати вриједност израза

$$\sqrt{a + a^{-1} + b + b^{-1}}.$$

2. Функција  $f$  је дата са  $f(x) = \frac{x+a}{2x+b}$ , при чему су  $a, b$  реални бројеви.

Ако је  $f(1) = 1$  и  $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ , наћи чему је једнако  $f(4)$ .

3. Кисела вода је поскупила за 15%. Колико се те воде може сада купити за новац којим се прије поскупљења могло купити 368 литара?

4. Одредити вриједности параметра  $k \in \mathbb{R}$  за коју је једно рјешење једначине  $8x^2 - 6x + 9k^2 = 0$  једнако квадрату другог рјешења.

5. Израчунати збир рјешења експоненцијалне једначине

$$2^x + 3^{x-2} = 3^x - 2^{x+1}.$$

6. Одредити број рјешења тригонометријске једначине  $\sin 2x - \cos x = 0$  која се налазе у интервалу  $[0, 2\pi]$ .

7. Израчунати вриједност израза

$$\frac{z + \bar{z}}{2z + 3},$$

ако је  $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ , гдје је  $i$  имагинарна јединица.

8. Дате су тачке  $A(3, 1)$  и  $B(7, 7)$ . Наћи једначину симетрале дужи  $AB$ .

9. Нека је дат ромб чији је збир дужина дијагонала  $d_1 + d_2 = 8$  cm и чија је површина  $P = 7$  cm<sup>2</sup>. Израчунати обим датог ромба.

10. Одредити број четвороцифрених природних бројева који су дјеливи са 5 и који су мањи од 2021.

## Рјешења

1. Бројеви  $a$  и  $b$  се могу написати у једноставнијем облику на следећи начин:

$$a = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{4 - 3} = 7 - 4\sqrt{3};$$

$$b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Користећи претходна израчунавања имамо да је

$$\begin{aligned} & a + a^{-1} + b + b^{-1} \\ &= 7 - 4\sqrt{3} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} + 5 - 2\sqrt{6} + \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} \\ &= \frac{(7 - 4\sqrt{3})^2 + 1}{7 - 4\sqrt{3}} + \frac{(5 - 2\sqrt{6})^2 + 1}{5 - 2\sqrt{6}} \\ &= \frac{49 - 56\sqrt{3} + 16 \cdot 3 + 1}{7 - 4\sqrt{3}} + \frac{25 - 20\sqrt{6} + 4 \cdot 6 + 1}{5 - 2\sqrt{6}} \\ &= \frac{98 - 56\sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}} + \frac{50 - 20\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}} \\ &= \frac{14(7 - 4\sqrt{3})}{7 - 4\sqrt{3}} + \frac{10(5 - 2\sqrt{6})}{5 - 2\sqrt{6}} = 24. \end{aligned}$$

Закључујемо да је  $\sqrt{a + a^{-1} + b + b^{-1}} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ .

2. Из услова  $f(1) = 1$  добијамо

$$1 = f(1) = \frac{1 + a}{2 + b}.$$

Из претходне једнакости закључујемо да је  $b \neq -2$ . Након множења једнакости са  $2 + b$  добијамо да је  $2 + b = 1 + a$ , што је еквивалентно са  $a = b + 1$ . Како је

$$f(2) = \frac{2 + a}{4 + b}$$

и

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + a}{1 + b} = \frac{1 + 2a}{2b + 2},$$

то из услова  $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$  добијамо

$$\frac{2 + a}{4 + b} = \frac{1 + 2a}{2 + 2b}, \quad b \neq -4, b \neq -1.$$

Користећи једнакост  $a = b + 1$ , коју смо добили из првог услова, претходна једнакост се своди на

$$\frac{3 + b}{4 + b} = \frac{3 + 2b}{2 + 2b}.$$

Множењем претходног израза са  $(4 + b)(2 + 2b)$  добијамо

$$(3 + b)(2 + 2b) = (3 + 2b)(4 + b),$$

из чега даље добијамо

$$2b^2 + 8b + 6 = 2b^2 + 11b + 12.$$

Претходна једнакост се своди на  $3b = -6$ , тј.  $b = -2$ , због чега вриједи да је  $a = b + 1 = -1$ . Враћајући добијене вриједности у израз којим је задана функција добијамо да је

$$f(x) = \frac{x - 1}{2x - 2}.$$

Вриједност функције за  $x = 4$  је

$$f(4) = \frac{4 - 1}{8 - 2} = \frac{1}{2}.$$

**3.** Означимо са  $x$  цијену киселе воде по литру прије поскупљења, а са  $m$  количину новца која је потребна да се купи 368 литара киселе воде. Тада је  $368 \cdot x = m$ , односно  $368 = \frac{m}{x}$ . Након поскупљења од 15%, цијена киселе воде по литру износи  $x + 15\%x = 1,15x$ . Количина киселе воде која може да се купи за новац  $m$  након поскупљења је

$$\begin{aligned} \frac{m}{1,15x} &= \frac{1}{1,15} \cdot \frac{m}{x} = \frac{1}{1,15} \cdot 368 = \frac{100 \cdot 368}{115} \\ &= \frac{(5 \cdot 20) \cdot (23 \cdot 16)}{5 \cdot 23} = 320. \end{aligned}$$

- 4.** Погледати задатак 4. на пријемном испиту одржаном у септембру 2020.  
**5.** Полазна једначина се може записати у облику

$$2^x + 2^{x+1} = 3^x - 3^{x-2}.$$

Како је  $2^x + 2^{x+1} = 2^x + 2 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^x$  и како је  $3^x - 3^x \cdot 3^{-2} = 3^x (1 - \frac{1}{9}) = 3^x \cdot \frac{8}{9}$ , полазна једначина је еквивалентна једначини

$$3 \cdot 2^x = 3^x \cdot \frac{8}{9}.$$

Дијелењем претходне једначине са  $3 \cdot 3^x$  добијамо

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Из претходног видимо да је  $x = 3$  једино рјешење полазне једначине.

**6.** Користећи формулу за синус двоструког угла дата једначина се своди на облик

$$0 = \sin 2x - \cos x = 2 \sin x \cos x - \cos x = \cos x (2 \sin x - 1).$$

Из претходног закључујемо да је  $\cos x = 0$  или  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Једина рјешења једначине  $\cos x = 0$  у интервалу  $[0, 2\pi]$  су  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$ , док су једина рјешења једначине  $\sin x = \frac{1}{2}$  у датом интервалу  $\frac{\pi}{6}$  и  $\frac{5\pi}{6}$ . Дакле, дата једначина има 4 рјешења у интервалу  $[0, 2\pi]$ .

7. Замјеном  $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  у дати израз добијамо

$$\begin{aligned} \frac{z + \bar{z}}{2z + 3} &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \overline{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)}}{2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 3} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{-1 + i + 3} = \\ &= \frac{-1}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{-2 + i}{2^2 + 1} = \frac{-2 + i}{5}. \end{aligned}$$

8. Једначина праве која пролази кроз тачке  $A(3, 1)$  и  $B(7, 7)$  је

$$y - 1 = \frac{7 - 1}{7 - 3}(x - 3),$$

односно  $y = \frac{3}{2}(x - 3) + 1$ . Симетрала дужи  $AB$  је права која је нормална на дуж  $AB$  и која полови дуж  $AB$ . Нека је  $M$  тачка која полови дуж  $AB$ . Координате тачке  $M$  су  $\left(\frac{7+3}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = (5, 4)$ . Како је симетрала дужи  $AB$  нормална на праву  $y = \frac{3}{2}(x - 3) + 1$ , то коефицијент правца симетрале мора да буде једнак

$$-\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3},$$

што даље значи да једначина нормале има облик  $y = -\frac{2}{3}x + n$ . Симетрала дужи  $AB$  пролази кроз тачку  $M$ , па уврштавање координата тачке  $M$  у претходну једнакост нам даје

$$4 = -\frac{2}{3} \cdot 5 + n,$$

одакле добијамо да је  $n = \frac{22}{3}$ . Дакле, једначина тражене симетрале је  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{22}{3}$ .

9. Нека је са  $d_1$  означена краћа дијагонала датог ромба (Слика 25). Површина ромба се може израчунати помоћу формуле

$$P = \frac{d_1 d_2}{2},$$

из чега добијамо да је  $d_1 \cdot d_2 = 14$ . Ако претходну једнакост запишемо у облику

$$d_2 = \frac{14}{d_1},$$

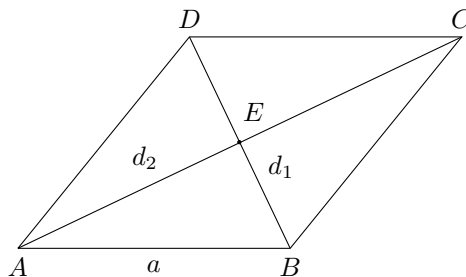
тада се једнакост  $d_1 + d_2 = 8$  своди на

$$d_1 + \frac{14}{d_1} = 8.$$

Множењем претходне једнакости са  $d_1$  добијамо квадратну једначину

$$d_1^2 - 8d_1 + 14 = 0.$$

Рјешавајући претходну једначину добијамо да је  $d_1 = (4 - \sqrt{2})$  cm или  $d_1 = (4 + \sqrt{2})$  cm. Како је  $d_1$  краћа дијагонала, из једнакости  $d_1 + d_2 = 8$  закључујемо да је  $d_1 \leq 4$ . Стога, закључујемо да је  $d_1 = 4 - \sqrt{2}$ . Дужина друге дијагонале је  $d_2 = 8 - d_1 = (4 + \sqrt{2})$ .



Слика 25: Задатак 9.

Дијагонале ромба се сијеку под правим углом, па је троугао  $ABE$  правоугли. Како се дијагонале ромба полове, то је  $|AE| = \frac{d_2}{2}$  и  $|BE| = \frac{d_1}{2}$ . Користећи Питагорину теорему у троуглу  $ABE$  добијамо да је

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 9,$$

одакле закључујемо да је  $a = 3$ . Дакле, обим датог ромба је  $O = 4 \cdot a = 12$  см.

**10. Први начин.** Посматрајмо за почетак четвороцифрене бројеве који почињу са цифром 1 и који су дјеливи са 5. Број је дјелив са 5 ако и само ако завршава са цифром 0 или 5. Четвороцифрен број који почиње са 1 и који је дјелив са 5 је облика

$$\overline{1xyz},$$

при чему је број  $z \in \{0, 5\}$ . Бројеви  $x, y$  су бројеви из скупа  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Да бисмо добили четвороцифрен број дјелив са 5 који почиње са 1, потребно је да изаберемо бројеве  $x, y, z$  на претходно описан начин. Број  $x$  можемо да одаберемо на 10 начина, број  $y$ , такође можемо да одаберемо на 10 начина, док број  $z$  можемо да одаберемо на два начина. Користећи се принципом производа закључујемо да таквих бројева има  $10 \cdot 10 \cdot 2 = 200$ . Бројева дјеливих са 5 који почињу са 2 и мањи су од 2021 има укупно 5 (2000, 2005, 2010, 2015, 2020). Сходно томе, закључујемо да четвороцифрених бројева који су мањи од 2021 и који су дјеливи са 5 има укупно 205.

**Други начин.** У низу бројева 1001, 1002, 1003,  $\dots$ , 2000 сваки пети број је дјелив са 5, што значи да у том низу укупно има  $\frac{1000}{5} = 200$  бројева који су дјеливи са 5. Бројеви 1000, 2005, 2010, 2015, 2020 су такође дјеливи са 5, али нису побројани у претходној дискусији. Убрајајући и њих добијамо да наведеном низу има  $200 + 5 = 205$  бројева који су дјеливи са 5.

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

## Септембар 2021.

## Задаци

1. Израчунати вриједност израза

$$\left( \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} + \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} - \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} \right) : \frac{1 - \frac{a-3b}{a+b}}{\frac{3a+b}{a-b} - 3},$$

при чему је  $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$  и  $a \neq -b$ .

2. Два двоцифрена броја, који имају исте цифре, се односе као 4:7. Ако је збир цифара сваког од бројева 9, израчунати производ цифара сваког од бројева.
3. Одредити за колико процената ће се смањити вријеме потребно да аутомобил пређе исти пут, ако аутомобил повећа брзину за 50%.
4. Одредити вриједност параметра  $m \in \mathbb{R}$  за који квадратне једначине  $2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$  и  $4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$  имају исто рјешење.
5. Одредити број петоцифрених бројева облика  $\overline{34x5y}$  који су дјелјиви са 36.
6. Одредити број рјешења експоненцијалне једначине  $5^x - 5^{3-x} = 20$ .
7. Одредити број рјешења експоненцијалне једначине

$$4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin^3 x + 3 \sin x - \cos x = 0$$

на интервалу  $[0, \pi]$ .

8. Ријешити једначину

$$3 + 10 + 17 + \dots + x = 345.$$

9. Одредити координате четвртог тјемена паралелограма  $ABCD$  ако су позната три тјемена  $A(1, -2, 0)$ ,  $B(2, 1, 3)$  и  $C(-2, 0, 5)$ .
10. Израчунати површину ромба ако му је обим 36 cm, а дужина странице је два пута већа од висине.

## Рјешења

1. Користећи основне алгебарске операције и идентитете дати израз сводимо на сљедећи облик

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} + \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} - \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} \right) : \frac{1 - \frac{a-3b}{a+b}}{\frac{3a+b}{a-b} - 3} \\
 &= \left( \frac{\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{1}{\frac{a+b}{a}} - \frac{1}{\frac{a-b}{a}} \right) : \frac{\frac{4b}{a+b}}{\frac{4b}{a-b}} \\
 &= \left( \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a-b} \right) : \frac{a-b}{a+b} \\
 &= \left( \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a^2-ab-a^2-ab}{a^2-b^2} \right) : \frac{a+b}{a-b} \\
 &= \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{a-b} \\
 &= \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a+b}{a-b} = 1,
 \end{aligned}$$

при чему је  $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$  и  $a \neq -b$ .

2. Напишимо тражене бројеве као  $\overline{xy}$  и  $\overline{yx}$ , гдје  $x$  и  $y$  представљају цифре тражених бројева. Из услова задатка имамо да је

$$x + y = 9 \quad \text{и} \quad \overline{xy} : \overline{yx} = 4 : 7.$$

Ако бројеве  $\overline{xy}$  и  $\overline{yx}$  запишемо у облику

$$\overline{xy} = x \cdot 10 + y \quad \text{и} \quad \overline{yx} = y \cdot 10 + x$$

добивамо да је

$$(10x + y) : (10y + x) = 4 : 7.$$

Рјешавајући претходну пропорцију добијамо да је  $70x + 7y = 40y + 4x$ , односно  $2x = y$ . Уврштавањем претходно добијене једнакости у услов задатка добијамо да је  $9 = x + y = x + 2x = 3x$ , из чега слиједи  $x = 3$ . Како је  $y = 2x = 6$ , то добијамо да је производ цифара датих бројева  $3 \cdot 6 = 18$ .

3. Означимо са  $s$  дужину пута који аутомобил пређе крећући се првобитном брзином  $v_1$ . Вријеме које је потребно аутомобилу да пређе пут датом брзином је

$$t_1 = \frac{s}{v_1}.$$

Увећавањем брзине за 50% аутомобил ће се кретати брзином од  $v_2 = v_1 + 50\%v_1 = 1,5v_1$ . Дакле, када аутомобил прелази исти пут увећаном брзином вријеме које му је потребно за то износи

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{1,5v_1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{s}{v_1} = \frac{2}{3} \cdot t_1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) t_1.$$

Стога, проценат за који се смањи вријеме износи  $\frac{1}{3} \approx 33,33\%$ .

4. Нека је  $t$  заједничко рјешење датих једначина. Како је  $t$  рјешење прве једначине имамо да је  $2t^2 - (3m + 2)t + 12 = 0$ . Множењем претходне једнакости са 3 добијамо  $6t^2 - (9m + 6)t + 36 = 0$ . Број  $t$  је рјешење и друге једначине, што значи да је  $4t^2 - (9m - 2)t + 36 = 0$ . Изједначавањем претходно добијених једнакости добијамо да је

$$6t^2 - (9m + 6)t + 36 = 0 = 4t^2 - (9m - 2)t + 36,$$

односно  $2t^2 - 8t = 0$ . Слиједи да је  $t = 0$  или  $t = 4$ . Ако би било  $t = 0$ , из прве једначине добили бисмо да је  $0 = 2t^2 - (3m + 2)t + 12 = 12$ , што не може да се деси. Дакле, ако дате једначине имају исто рјешење, то рјешење мора да буде једнако 4. Како је 4 рјешење прве једначине имамо да вриједи

$$0 = 2t^2 - (3m + 2)t + 12 = 2 \cdot 4^2 - (3m + 2) \cdot 4 + 12 = 36 - 12m,$$

односно  $m = 3$ . Уврштавањем  $m = 3$  видимо да дате једначине заиста имају исто рјешење.

5. Број је дјелив са 36 ако и само је он дјелив и са 9 и са 4. Број је дјелив са 9 ако и само ако му је збир цифара дјелив са 9. Број дјелив са 4 ако и само му је двоцифрени завршетак дјелив са 4. Дакле, на основу критеријума дјеливости са 4, слиједи да 4 мора да дијели број  $\overline{5y}$ , гдје је  $y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Слиједи да за  $y$  имамо двије могућности,  $y = 2$  или  $y = 6$ .

- (а) Ако је  $y = 2$  на основу критеријума дјеливости са 9 закључујемо да број  $3 + 4 + x + 5 + 2 = 14 + x$  мора бити дјелив са 9. Како је  $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , број  $14 + x \in \{14, 15, 16, \dots, 23\}$  је дјелив са 9 само у случају када је  $x = 4$ . Дакле, у овом случају имамо један број који задовољава услове задатка, то је број 34452.
- (б) Ако је  $y = 6$  аналогно рјешењу из претходног случаја имамо да број  $3 + 4 + x + 5 + 6 = 18 + x$  мора бити дјелив са 9. Како је  $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , број  $18 + x \in \{18, 19, 20, \dots, 27\}$  је дјелив са 9 ако и само ако је  $x = 0$  или  $x = 9$ . Дакле, у овом случају имамо два броја која задовољавају услове задатка, то су бројеви: 34056 и 34956.

Слиједи да постоје три броја датог облика који су дјеливи са 36.

6. Полазну једначину сводимо на њој еквивалентну

$$5^x - \frac{5^3}{5^x} = 20.$$

Увођењем смјене  $5^x = t, t > 0$  добијамо једначину

$$t - \frac{125}{t} = 20,$$

односно  $t^2 - 20t - 125 = 0$ . Рјешења дате квадратне једначине су  $t_1 = 25$  и  $t_2 = -5$ . Како је  $t > 0$  једино могуће рјешење је  $t = 25$ . Како је  $5^x = t = 25 = 5^2$ , добијамо да је  $x = 2$  рјешење полазне једначине. Дакле, једначина има једно рјешење.

7. Користећи основни тригонометријски идентитет  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , израз на лијевој страни знака једнакости се трансформише у

$$\begin{aligned} & 4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin^3 x + 3 \sin x - \cos x \\ &= 4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin x(1 - \cos^2 x) + 3 \sin x - \cos x \\ &= 4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin x + 4 \sin x \cos^2 x + 3 \sin x - \cos x \\ &= 4 \sin^2 x \cos x + 4 \sin x \cos^2 x - \sin x - \cos x. \end{aligned}$$

Како је  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , претходни израз се може записати у облику

$$2 \sin x \sin 2x + 2 \cos x \sin 2x - \sin x - \cos x.$$

Користећи се формулом за претварање производа тригонометријских функција у збир добијамо

$$2 \sin 2x \sin x = \cos(2x - x) - \cos(2x + x) = \cos x - \cos 3x$$

и

$$2 \sin 2x \cos x = \sin(2x + x) + \sin(2x - x) = \sin 3x + \sin x.$$

Уврштавајући претходне једнакости, добијамо да је полазна једначина еквивалентна једначини

$$-\cos 3x + \sin 3x = 0, \quad (3)$$

односно  $\sin 3x = \cos 3x$ . Приметијемо да за  $x$  за које вриједи претходна неједнакост  $\cos 3x \neq 0$ . Заиста, ако је  $\cos 3x = 0$ , тада  $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , из чега добијамо  $\sin 3x = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k \neq 0 = \cos 3x$ . Дјеломом једначине  $\sin 3x = \cos 3x$  са  $\cos 3x \neq 0$ , добијамо једначину  $\operatorname{tg} 3x = 1$ . Стога, рјешења дате једначине су

$$3x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

односно

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из овога видимо да једначина има 3 рјешења у интервалу  $[0, \pi]$ :

$$\frac{\pi}{12}, \quad \frac{5\pi}{12} \quad \text{и} \quad \frac{9\pi}{12}.$$

**Други начин.** Користећи основни тригонометријски идентитет  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , израз на лијевој страни знака једнакости се трансформише у

$$\begin{aligned} & 4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin^3 x + 3 \sin x - \cos x \\ &= 4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin x(1 - \cos^2 x) + 3 \sin x - \cos x \\ &= 4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin x + 4 \sin x \cos^2 x + 3 \sin x - \cos x \\ &= 4 \sin^2 x \cos x + 4 \sin x \cos^2 x - \sin x - \cos x. \\ &= 4 \sin x \cos x(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x) \\ &= (\sin x + \cos x)(4 \sin x \cos x - 1) \\ &= (\sin x + \cos x)(2 \sin 2x - 1). \end{aligned}$$

Рјешења дате једначине налазимо из рјешења једначина

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \text{и} \quad 2 \sin 2x - 1 = 0.$$

Како је

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left( \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$$

добивамо да су рјешења прве једначине

$$x + \frac{\pi}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из овога видимо да једино за  $k = 1$  имамо рјешење једначине које припада датом интервалу.

Трансформацијом друге једначине на облик

$$\sin 2x = \frac{1}{2},$$

добивамо да је

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{или} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

из чега закључујемо да су рјешења дате једначине

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{5\pi}{12} + l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Једина рјешења која се налазе у датом интервалу добијамо за  $k = 0$  и  $l = 0$ . Стога, дата једначина има три рјешења у датом интервалу.

**8.** Уочимо да сабирци са лијеве стране знака једнакости образују аритметички низ чији је први члан  $a_1 = 3$  и разлика  $d = 7$ . Како бисмо одредили  $x$  довољно је одредити на којој позицији у низу се  $x$  налази. У задатку је дата сума првих  $n$  чланова аритметичког низа, гдје је  $n$  позиција броја  $x$  у том низу. Користећи формулу за суму првих  $n$  чланова аритметичког низа

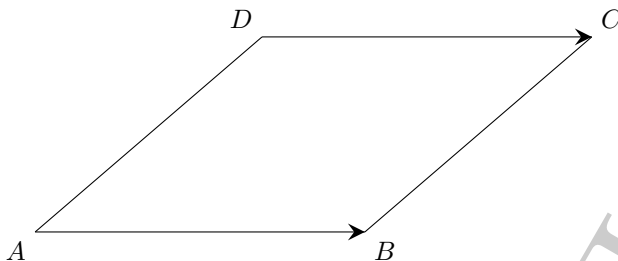
$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d),$$

једначина се своди на

$$\frac{n}{2} (2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 7) = 345.$$

Из тога добијамо да је  $690 = n(7n-1)$ , односно  $7n^2 - n - 690 = 0$ . Рјешавањем добијене квадратне једначине добијамо да је  $n = 10$  или  $n = -\frac{138}{14}$ . Како је  $n$  природан број слиједи да је  $n = 10$ . Дакле,  $x$  је десети члан низа и на основу формуле за  $n$ -ти члан аритметичког низа имамо да је  $x = 3 + (10-1) \cdot 7 = 66$ .

**9.** Координате четвртог тјемења  $D(x, y, z)$  датог паралелограма  $ABCD$  налазимо из једнакости  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  (Слика 26). Како је  $\overrightarrow{AB} = (2-1, 1-(-2), 3-$



Слика 26: Задатак 9.

$0) = (1, 3, 3)$  и  $\overrightarrow{DC} = (-2 - x, 0 - y, 5 - z)$  изједначавањем одговарајућих координата добијамо

$$\begin{aligned} -2 - x &= 1, \\ -y &= 3, \\ 5 - z &= 3, \end{aligned}$$

односно  $x = -3$ ,  $y = -3$ ,  $z = 2$ . Дакле, координате тачке  $D$  су  $(-3, -3, 2)$ .

**10.** Обим ромба је  $O = 4a = 36$  cm одакле је  $a = 9$  cm. Како је дужина странице duplo већа од висине важи да је  $a = 2 \cdot h$  односно  $h = \frac{a}{2}$ . Површина ромба се може добити по формули

$$P = a \cdot h = \frac{a^2}{2}.$$

Уврштавајући  $a = 9$  cm добијамо да је  $P = \frac{81}{2} \text{ cm}^2 = 40.5 \text{ cm}^2$ .

**Јун 2022.****Задачи**

1. Израчунати вриједност израза

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2019 - 2020 + 2021 - 2022.$$

2. Израчунати вриједност израза

$$\frac{2^{2020} + 2^{2021} + 2^{2022}}{14 \cdot 2^{1011}}.$$

3. Израчунати вриједност израза

$$\frac{1 + a + \frac{1}{1-a}}{1 + \frac{1}{1-a^2}}.$$

4. Основица једнакокраког троугла је 6 cm, а крак је 5 cm. Одредити дужину висине на крак троугла.

5. Ако је  $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$ , одредити  $f(x - 1)$ .

6. Ријешити неједначину

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 5x + 6} \geq 1.$$

7. Израчунати коефицијент правца симетрале дужи чије су крајње тачке  $A(-2, -1)$  и  $B(2, 2)$ .

8. Одредити коефицијент уз  $x^7$  у развоју  $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)^8$ .

9. Колико има природних бројева  $n$  за које је  $n^2 + 2n + 29$  потпун квадрат?

10. У низу од пет природних бројева број 2 је први, а број 12 последњи. Производ прва три броја је 30, производ средња три броја је 90, а производ последња три броја је 360. Који је број у средини тог низа?

## Рјешења

1.

$$\begin{aligned}
 & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2019 - 2020 + 2021 - 2022 \\
 &= (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (2019 - 2020) + (2021 - 2022) \\
 &= (-1) + (-1) + \dots + (-1) + (-1) \\
 &= (-1) \cdot 1011 = -1011
 \end{aligned}$$

2.

$$\frac{2^{2020} + 2^{2021} + 2^{2022}}{14 \cdot 2^{1011}} = \frac{2^{2020}(1 + 2 + 2^2)}{14 \cdot 2^{1011}} = \frac{2^{1009} \cdot 7}{14} = 2^{1008}.$$

3. Вриједи

$$\frac{1 + a + \frac{1}{1-a}}{1 + \frac{1}{1-a^2}} = \frac{\frac{1-a+a(1-a)+1}{1-a}}{\frac{1-a^2+1}{1-a^2}} = \frac{\frac{2-a^2}{1-a}}{\frac{2-a^2}{(1-a)(1+a)}} = 1 + a,$$

за  $a \notin \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ .

4. Нека је троугао  $ABC$  једнакокраки троугао чија је основица дужине 6 cm, а крак је дужине 5 cm и нека је  $C'$  подножје висине из тјемена  $C$  на основицу  $AB$  (Слика 27). Како висина која одговара основици у једнакокраком троуглу пада у средиште основице, примјеном Питагорине теореме на троугао  $C'BC$  закључујемо да вриједи

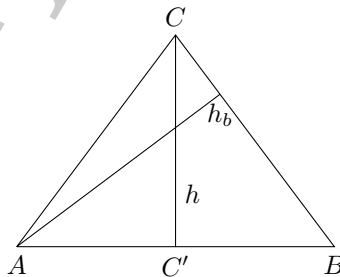
$$h^2 + 3^2 = 5^2,$$

одакле је  $h = 4$ . Површина троугла  $ABC$  једнака је

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = 12.$$

Како се површина троугла  $ABC$  може израчунати и по формули

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2},$$

при чему је  $h_b$  висина која одговара краку  $b$ , слиједи да је  $h_b = \frac{24}{5} = 4,8$ .

Слика 27: Задатак 4.

5. Уведимо смјену  $t = x + 1$ . Тада је  $x = t - 1$ , па је

$$f(t) = (t - 1)^2 - 3(t - 1) + 2 = t^2 - 5t + 6.$$

На основу добијеног је

$$f(x) = x^2 - 5x + 6,$$

па је

$$f(x - 1) = (x - 1)^2 - 5(x - 1) + 6 = x^2 - 7x + 12.$$

6. Након одузимања броја 1 лијевој и десној страни дате неједначине, добијамо еквивалентну неједначину

$$\frac{-2x - 2}{x^2 + 5x + 6} \geq 0,$$

односно

$$\frac{-2x - 2}{(x + 2)(x + 3)} \geq 0.$$

	$(-\infty, -3)$	$-3$	$(-3, -2)$	$-2$	$(-2, -1)$	$-1$	$(-1, \infty)$
$-2x - 2$	+	+	+	+	+	0	-
$x + 2$	-	-	-	0	+	+	+
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{-2x-2}{x^2+5x+6}$	+	н.д.	-	н.д.	+	0	-

Табела 3: Задатак 6.

Из Табеле 3 добијамо да је рјешење дате неједначине скуп  $(-\infty, -3) \cup (-2, -1]$ .

7. Погледати задатак 7. на пријемном испиту одржаном у првом септембарском року 2017.

8. Примјеном биномне формуле добијамо да је израз  $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)^8$  једнак

$$\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \left(-\frac{2}{x}\right)^{8-k} = \sum_{k=0}^8 (-1)^{8-k} \binom{8}{k} x^{3k-8} 2^{8-2k}.$$

Како се тражи коефицијент уз  $x^7$ , постављамо услов  $3k - 8 = 7$  и добијамо да мора бити  $k = 5$ . Тражени коефицијент је

$$(-1)^{8-5} \cdot 2^{8-2 \cdot 5} \cdot \binom{8}{5} = -\binom{8}{5} \cdot 2^{-2} = -\frac{56}{4} = -14.$$

9. Претпоставимо да је број  $n^2 + 2n + 29$  квадрат природног броја  $m$ . Тада вриједи  $(n + 1)^2 + 28 = m^2$ . Закључујемо да је  $28 = m^2 - (n + 1)^2 = (m - n - 1)(m + n + 1)$ . Потражимо природне бројеве  $m$  и  $n$  за које вриједи посљедња једнакост. Систем једначина

$$\begin{aligned} m - n - 1 &= 1 \\ m + n + 1 &= 28 \end{aligned}$$

нема рјешење у скупу природних бројева, јер бисмо сабирањем ових једначина добили да је  $m = \frac{29}{2} \notin \mathbb{N}$ . Слично се добије и у случају система

$$m - n - 1 = 4$$

$$m + n + 1 = 7.$$

Систем

$$m - n - 1 = 2$$

$$m + n + 1 = 14$$

има рјешење у скупу природних бројева. Наиме,

$$m = 8, n = 5$$

је рјешење овог система. Како је  $m - n - 1 < m + n + 1$ , то не разматрамо случајеве када је  $m - n - 1 \in \{7, 14, 28\}$ . Исто тако, како је  $m + n + 1 \in \mathbb{N}$ , то не разматрамо случајеве негативних дјелилаца броја 28. Како је  $28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$ , добијено рјешење је једино рјешење овог задатка, тј. једино за  $n = 5$  је број  $n^2 + 2n + 29$  потпун квадрат.

**10.** Нека су  $2, a, b, c$  и  $12$  посматрани бројеви. На основу услова датих у тексту задатка имамо да вриједи систем једначина

$$2ab = 30$$

$$abc = 90$$

$$12bc = 360.$$

Ако прву једначину система помножимо са  $c \neq 0$ , а другу са  $2$ , добијамо да вриједи  $30c = 180$ , па је  $c = 6$ . Уврштавајући ту вриједност у посљедњу једначину система, закључујемо да је средњи члан низа  $b = 5$ .

## Септембар 2022.

## Задаци

1. Израчунати вриједност израза

$$\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

2. Израчунати вриједност израза

$$2^{1011} \frac{i^{2022} + i^{2023}}{i^{2021} - i^{2024}} + (1 + i)^{2022},$$

гдје је  $i$  имагинарна јединица.

3. Упростити израз

$$\frac{4 - \frac{4+a^2}{a}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{a}}, \text{ за } a \neq 2, a \neq 0.$$

4. Ако је површина правилног шестоугла једнака  $P = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ , одредити дужину краће дијагонале шестоугла.
5. Нека је  $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$  и  $g(x) = \frac{2x-3}{2-x}$ . Одредити  $(f \circ g)(x)$ .
6. Ако је  $x = -1$  рјешење квадратне једначине  $2x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ , одредити збир квадрата свих рјешења те једначине.
7. Права садржи тачку  $A(8, 15)$  и сијече праву чија је једначина  $y = 7x + 9$  под правим углом у тачки  $B$ . Одредити збир координата тачке  $B$ .
8. Цијена неке робе је повећана за 50%. Израчунати за колико је потребно смањити нову цијену да се цијена робе врати на стару цијену.
9. Одредити на колико се начина из скупа  $\{1, 2, 3, \dots, 40\}$  могу изабрати три броја тако да им збир буде непаран број.
10. Бројеви  $a, b$  и  $c$  су три узастопна члана аритметичке прогресије, а бројеви  $a, b$  и  $c+3$  су три узастопна члана геометријске прогресије са количником 2. Одредити збир бројева  $a, b$  и  $c$ .

## Рјешења

1. Уочимо да се израз  $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$  након кориштења основног тригонометријског идентитета своди на

$$\sin^2 \alpha \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot 1 + \cos^2 \alpha = 1.$$

2. Подсјетимо се да је  $i^4 = 1$ , одакле имамо да вриједи

$$i^{2021} = (i^4)^{505} \cdot i = i.$$

Даље је

$$i^{2022} = i^{2021} \cdot i = -1,$$

$$i^{2023} = i^{2022} \cdot i = -i,$$

$$i^{2024} = i^{2023} \cdot i = 1.$$

Вриједје такође и једнакости

$$(1 + i)^2 = 2i \text{ и } i^{1011} = (i^4)^{252} \cdot i^3 = -i.$$

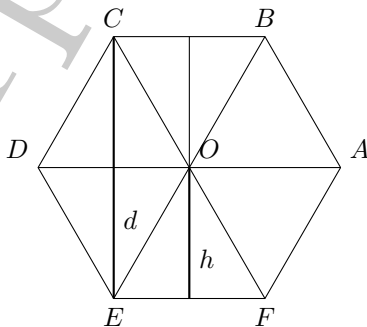
Зато добијамо да вриједи

$$\begin{aligned} & 2^{1011} \cdot \frac{i^{2022} + i^{2023}}{i^{2021} - i^{2024}} + (1 + i)^{2022} \\ &= 2^{1011} \cdot \frac{-1 - i}{i - 1} + 2^{1011} \cdot i^{1011} \\ &= -2^{1011} \cdot \frac{1 + i + i^2 - i}{i - 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. Уочимо да се посматрани израз након сређивања своди на сљедећи

$$\frac{\frac{4a-4-a^2}{a}}{\frac{a-2}{2a}} = \frac{2(-a^2 + 4a - 4)}{a - 2} = \frac{-2(a - 2)^2}{a - 2} = 4 - 2a, a \neq 2, a \neq 0.$$

4. Како је површина правилног шестоугла једнака  $P = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$ , мора бити  $a^2 = 36$  см, односно  $a = 6$  см.



Слика 28: Задатак 4.

Нека су  $A, B, C, D, E$  и  $F$  тјемења шестоугла и нека је  $O$  центар описаног круга тог шестоугла. Нека је  $h$  дужина висине у једнакостраничном троуглу  $OEF$ . Примијетимо да је дужина краће дијагонале  $CE$  правилног шестоугла једнака двострукој дужини висине посматраног једнакостраничног троугла  $OEF$  (Слика 28). Вриједи дакле,  $d = 2h = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$  cm.

5. За  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$  је

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x-3}{2-x}\right) = \frac{2\frac{2x-3}{2-x} + 3}{\frac{2x-3}{2-x} + 2} = \frac{\frac{4x-6+6-3x}{2-x}}{\frac{2x-3+4-2x}{2-x}} = x.$$

6. Након уврштавања рјешења  $x_1 = -1$  у једначину  $2x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ , добијамо да вриједи једнакост  $2 - m + 2m - 1 = 0$ , односно  $m = -1$ . Дакле, ради се о једначини

$$2x^2 - x - 3 = 0.$$

На основу Вијетових формула вриједи

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2},$$

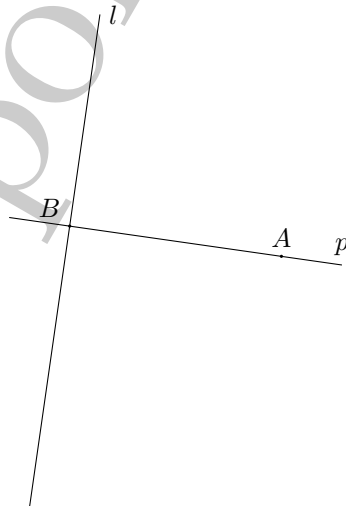
одакле је  $x_2 = \frac{3}{2}$ . Према томе, збир квадрата рјешења полазне једначине једнак је

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}.$$

7. Нека је  $p$  права која садржи тачку  $A$  и која је нормална на праву  $l : y = 7x + 9$  (Слика 29). Једначина праве  $p$  је

$$y - 15 = k(x - 8),$$

гдје је  $k$  непознати коефицијент правца те праве.



Слика 29: Задатак 7.

Како посматрана права сијече праву  $l$  под правим углом, то је производ њихових коефицијената праваца једнак  $-1$ , те мора бити  $k = -\frac{1}{7}$ . Након уврштавања вриједности  $k = -\frac{1}{7}$  у претходну једначину и након сређивања исте, добијамо да је

$$p : y = -\frac{1}{7}x + \frac{113}{7}.$$

Како се тражена тачка  $B$  налази у пресеку ових правих, треба ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{7}x + \frac{113}{7} \\ y &= 7x + 9. \end{aligned}$$

Добијамо да су координате пресјечне тачке  $x = 1$  и  $y = 16$ , односно тражена сума координата тачке  $B$  је 17.

8. Означимо са  $x$  стару цијену робе. Нова цијена робе је

$$x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x.$$

Означимо са  $p$  проценат за који треба умањити нову цијену да се цијена врати на стару. Тада је

$$\frac{3}{2}x - p \cdot \frac{3}{2}x = x,$$

односно

$$1 - p = \frac{2}{3}.$$

Одатле је  $p = \frac{1}{3}$ .

9. Подсјетимо се да је број начина да се из скупа од  $n$  елемената одабере њих  $k$  једнак  $\binom{n}{k}$ . Да би се из скупа  $\{1, 2, \dots, 40\}$  одабрала три броја чији је збир непаран број, неопходно је или одабрати сва три непарна броја или два парна и један непаран број. Да одаберемо три непарна броја из скупа  $\{1, 2, \dots, 40\}$  имамо  $\binom{20}{3}$  могућности, јер у посматраном скупу укупно 20 бројева је непарно. Слично, да одаберемо два парна и један непаран број из истог тог скупа имамо  $\binom{20}{2} \cdot \binom{20}{1}$  могућности. Дакле, тражени број начина је сума ових бројева

$$\binom{20}{3} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3! \cdot 17!} + 20 \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2! \cdot 18!} = 4940.$$

10. Како бројеви  $a, b$  и  $c$  представљају три узастопна члана аритметичке прогресије, то је за неко  $d \in \mathbb{N}$

$$b = a + d \text{ и } c = a + 2d.$$

Како бројеви  $a, b$  и  $c + 3$  представљају три узастопна члана геометријске прогресије са количником 2, то је

$$b = 2a \text{ и } c + 3 = 2b = 4a.$$

Даље имамо да је  $a + d = 2a$ , односно  $a = d$ . Мора бити и  $a + 2d + 3 = 4a$ , па је  $a = 3$ . Закључујемо да се ради о бројевима  $a = 3, b = 6, c = 9$ , а њихов збир једнак је 18.

**Јун 2023.****Задаци**

1. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned}x(x - 2) &= 0, \\x^2 + x - 6 &= 0.\end{aligned}$$

2. Израчунати вриједност израза  $x^6 + \frac{1}{x^6}$ , ако је познато да је  $x \neq 0$  и  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ .

3. Израчунати збир рјешења експоненцијалне једначине

$$4^{2x^2 - 6x + 1} = \frac{1}{64}.$$

4. Одредити растојање центра кружнице чија је једначина  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 10 = 0$  од пресјечне тачке правих чије су једначине  $2x - 3y - 5 = 0$  и  $5x + y - 4 = 0$ .

5. Одредити реални дио комплексног броја  $(1 + i)^{21}$ , гдје је  $i$  имагинарна јединица.

6. Нека су дужине страница троугла  $ABC$  10 cm, 12 cm и 18 cm и нека њему сличан троугао  $A_1B_1C_1$  има обим једнак 50 cm. Одредити дужину најкраће странице троугла  $A_1B_1C_1$ .

7. Одредити број рјешења тригонометријске једначине  $\cos 2x - \sin x = 1$  у интервалу  $(0, 2\pi)$ .

8. У једном разреду дјевојчица има два пута више од дјечака. Одличних ученика међу дјевојчицама има 20%, а међу дјечацима 8%. Одредити укупан проценат одличних ученика у том разреду.

9. Одредити последњу цифру броја  $2023^{2023}$ .

10. Израчунати вриједност израза

$$\sin\left(3 \frac{\log_3 12 + \log_4 12}{\log_3 12 \cdot \log_4 12} \cdot \pi\right).$$

## Рјешења

1. Дати систем записујемо у облику

$$\begin{aligned}x^2 - 2x &= 0, \\x^2 + x &= 6.\end{aligned}$$

Множењем прве једначине са  $-1$  и сабирањем са другом једначином добијамо да  $x$  мора задовољавати једнакости  $3x = 6$ , односно  $x = 2$ . Уврштавањем  $x = 2$  у систем видимо да су задовољене обје једначине, тј.  $x = 2$  јесте рјешење датог система.

2. Користећи формулу  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ , добијамо да је

$$\begin{aligned}x^6 + \frac{1}{x^6} &= (x^2)^3 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^4 - x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) \\&= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4} - 1\right).\end{aligned}$$

Квадрирањем једнакости

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

добијамо

$$x^4 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 9,$$

односно

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 7.$$

Дакле,

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 3 \cdot (7 - 1) = 18.$$

3. Како је  $\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = 4^{-3}$  полазна једначина се своди на

$$4^{2x^2 - 6x + 1} = 4^{-3}.$$

Изједначавањем експонената у претходној једнакости добијамо једначину

$$2x^2 - 6x + 1 = -3,$$

тј.  $2x^2 - 6x + 4 = 0$ . Рјешења добијене квадратне једначине су

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4},$$

односно  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$ . Дакле, збир рјешења дате једначине је  $1 + 2 = 3$ .

4. Тачку пресека правих добијамо рјешавањем система једначина

$$\begin{aligned}2x - 3y - 5 &= 0 \\5x + y - 4 &= 0.\end{aligned}$$

Ако другу једначину помножимо са 3 и саберемо са првом добијемо  $17x - 17 = 0$ , одакле слиједи да је  $x = 1$ . Уврштавајући претходну вриједност у било коју од једначина из система добијемо да је  $y = -1$ . Дакле, пресјечна тачка  $A$  датих правих има координате  $(1, -1)$ . Како бисмо одредили координате центра кружнице, потребно је да једначину кружнице запишемо у општем облику

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3.$$

Одавде слиједи да је центар кружнице у тачки  $O(-2, 3)$ . Удаљеност центра кружнице од тачке  $A$  рачунамо на сљедећи начин

$$d(O, A) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

5. Како је  $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ , вриједност израза рачунамо на сљедећи начин

$$\begin{aligned} (1 + i)^{21} &= (1 + i)^{20}(1 + i) = ((1 + i)^2)^{10}(1 + i) = (2i)^{10}(1 + i) \\ &= 2^{10}(i^2)^5(1 + i) = -1024(1 + i) = -1024 - 1024i. \end{aligned}$$

Из претходног видимо да је реални дио датог комплексног броја једнак  $-1024$ .

6. Троуглови  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  су слични са коефицијентом сличности  $k$ . Однос обима сличних троуглова једнак је коефицијенту сличности. Из тога слиједи да је  $k = O : O_1 = (10 + 12 + 18) : 50 = 40 : 50 = 4 : 5$ . Како дужина најкраће странице троугла  $ABC$  износи 10 cm дужину најкраће странице  $x$  троугла  $A_1B_1C_1$  рачунамо на сљедећи начин

$$10 : x = 4 : 5,$$

одакле добијемо да је  $x = \frac{5 \cdot 10}{4} = 12,5$ .

7. Користећи тригонометријски идентитет

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x,$$

дата једначина је еквивалентна са

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 1,$$

одакле добијемо да је полазна једначина еквивалентна једначини

$$-2\sin^2 x - \sin x = 0,$$

односно

$$-\sin x(2\sin x + 1) = 0.$$

Одавде добијемо да је  $\sin x = 0$  или  $\sin x = -\frac{1}{2}$ . Једино рјешење једначине  $\sin x = 0$  на интервалу  $(0, 2\pi)$  је  $x = \pi$ . Рјешења једначине  $\sin x = -\frac{1}{2}$  у интервалу  $(0, 2\pi)$  су  $x_1 = \frac{7\pi}{6}$  и  $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ . Закључујемо да полазна једначина има укупно три рјешења у интервалу  $(0, 2\pi)$ .

8. Означимо са  $x$  број дјевојчица, а са  $y$  број дјечака у разреду. Из услова задатка  $x = 2y$  имамо да је укупан број ученика у разреду  $x + y = 3y$ . Из задатка имамо да је број дјевојчица одличног успјеха једнак  $20\% \cdot x = \frac{1}{5}x = \frac{2}{5}y$ . Број дјечака одличног успјеха је  $8\%y = \frac{2}{25}y$ . Стога, укупан број одличних ученика у разреду је

$$\frac{2}{5}y + \frac{2}{25}y = \frac{12y}{25}.$$

Процент одличних ученика у разреду се добија као количник броја одличних ученика и укупног броја ученика, тј.

$$\frac{\frac{12y}{25}}{3y} = \frac{12}{75} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%.$$

9. Посљедња цифра производа два броја једнака је посљедњој цифри производа посљедњих цифара бројева које množимо. Тако видимо да је

$$\begin{aligned} 2023^2 &= 2023 \cdot 2023 = \dots 9, \\ 2023^3 &= 2023^2 \cdot 2023 = \dots 9 \cdot 2023 = \dots 7, \\ 2023^4 &= 2023^3 \cdot 2023 = \dots 7 \cdot 2023 = \dots 1, \\ 2023^5 &= 2023^4 \cdot 2023 = \dots 1 \cdot 2023 = \dots 3, \\ 2023^6 &= 2023^5 \cdot 2023 = \dots 3 \cdot 2023 = \dots 9, \\ 2023^7 &= 2023^6 \cdot 2023 = \dots 9 \cdot 2023 = \dots 7. \end{aligned}$$

Из претходног закључујемо да

$$2023^8 = 2023^4 \cdot 2023^4 = (\dots 1) \cdot (\dots 1) = \dots 1.$$

Како се производ бројева који завршавају цифром 1 се, такође, завршава цифром 1, то имамо да је

$$2023^{2023} = (2023^4)^{505} \cdot 2023^3 = (\dots 1) \cdot (\dots 7) = \dots 7.$$

Тражени број завршава цифром 7.

10. Користећи формулу

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1,$$

добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\log_3 12 + \log_4 12}{\log_3 12 \cdot \log_4 12} &= \frac{\frac{1}{\log_{12} 3} + \frac{1}{\log_{12} 4}}{\frac{1}{\log_{12} 3 \log_{12} 4}} = \frac{\frac{\log_{12} 4 + \log_{12} 3}{\log_{12} 3 \cdot \log_{12} 4}}{\frac{1}{\log_{12} 3 \cdot \log_{12} 4}} \\ &= \log_{12} 4 + \log_{12} 3. \end{aligned}$$

Како је  $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$  и  $\log_a a = 1$ , за  $x, y > 0, a \neq 1$ , претходни израз се своди на

$$\log_{12} 4 + \log_{12} 3 = \log_{12} 12 = 1.$$

Због тога, имамо да је вриједност датог израза једнака

$$\sin\left(3 \frac{\log_3 12 + \log_4 12}{\log_3 12 \cdot \log_4 12} \cdot \pi\right) = \sin 3\pi = 0.$$

**Септембар 2023.****Задаци**

1. Одредити  $x$  ако је  $x(x - 3) = 0$  и  $x^2 + x - 12 = 0$ .
2. Одредити удаљеност центра кружнице чија је једначина  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$  од тачке  $(3, 4)$ .
3. Израчунати вриједност израза

$$\left[ [(0, 2)^{-1} \cdot 2^{0,5}] : \frac{5}{3} \right]^2.$$

4. Ако је познато да кока и по за дан и по снесе јаја и по, одредити колико јаја ће снијети 60 кока за 120 дана.
5. Одредити реални дио броја  $(1 - i)^{21}$ , гдје је  $i$  имагинарна јединица.
6. Одредити збир рјешења једначине

$$4^{2x^2 - 6x + 1} = \frac{1}{64}.$$

7. Одредити број рјешења једначине  $\cos 2x - \sin x = 1$  која се налазе у интервалу  $(0, 2\pi)$ .
8. Прије поскупљења кафе за неку суму новца је било могуће купити 391 kg кафе. Одредити колико килограма кафе се може купити за исту суму новца након поскупљења од 15%.
9. Кружница која садржи тјемења тупих углова и једно тјеме оштрог угла ромба дијели дужу дијагоналу на дијелове чије су дужине 25 и 7. Одредити дужину странице тог ромба.
10. Одредити број цијелих бројева у развоју

$$\left( \sqrt[6]{54} + \sqrt[3]{32} \right)^{2022}.$$

## Рјешења

1. Систем једначина записујемо у облику

$$\begin{aligned}x^2 - 3x &= 0, \\x^2 + x - 12 &= 0.\end{aligned}$$

Множењем прве једначине са  $-1$  и сабирањем са другом једначином добијамо  $4x - 12 = 0$ , односно  $x = 3$ . Уврштавањем добијене вриједности у систем видимо да је  $x = 3$  рјешење система.

2. Једначину кружнице записујемо у сљедећем облику  $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 4 = 0$ , односно

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$

Одавде се види да је центар кружнице тачка  $O$  са координатама  $(-1, -3)$ . Удаљеност тачке  $O(-1, -3)$  од тачке  $A(3, 4)$  износи

$$d(O, A) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-3 - 4)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}.$$

3. Ако бројеве из децималног записа преведемо у разломке, добијамо израз

$$\left[ \left[ \left( \frac{1}{5} \right)^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right] : \frac{5}{3} \right]^2 \cdot (-3)^{-2}.$$

Користећи основне алгебарске операције израз се своди на

$$\left[ \left( 5 \cdot \sqrt{2} \right) \cdot \frac{3}{5} \right]^2 \cdot \frac{1}{9} = \left( 3\sqrt{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{9} = 9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = 2.$$

4. Повећањем броја кока без промјене временског интервала, број јаја које оне снесу се повећа исти број пута. Стога, повећањем броја кока 40 пута добијамо да ће се број јаја које оне снесу повећати 40 пута. Дакле, ако кока и по за дан и по снесе јаје и по, тада ће  $1,5 \cdot 40 = 60$  кока за дан и по снијети  $1,5 \cdot 40 = 60$  јаја. Повећањем временског интервала уз исти број кока број јаја ће се повећати исти број пута. Стога, повећањем временског интервала 80 пута, број снесених јаја ће се повећати 80 пута. Дакле, 60 кока за  $1,5 \cdot 80 = 120$  дана ће снијети  $60 \cdot 80 = 4800$  јаја.

5. Како је  $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$ , вриједност датог израза рачунамо на сљедећи начин

$$\begin{aligned}(1 - i)^{21} &= (1 - i)^{20}(1 - i) = ((1 - i)^2)^{10}(1 - i) = (-2i)^{10}(1 - i) \\&= 2^{10}(i^2)^5(1 - i) = -1024(1 - i) = -1024 + 1024i.\end{aligned}$$

Дакле, реални дио датог комплексног броја је  $-1024$ .

6. Погледати задатак 3. на пријемном испиту одржаном у јуну 2023.

7. Погледати задатак 7. на пријемном испиту одржаном у јуну 2023.

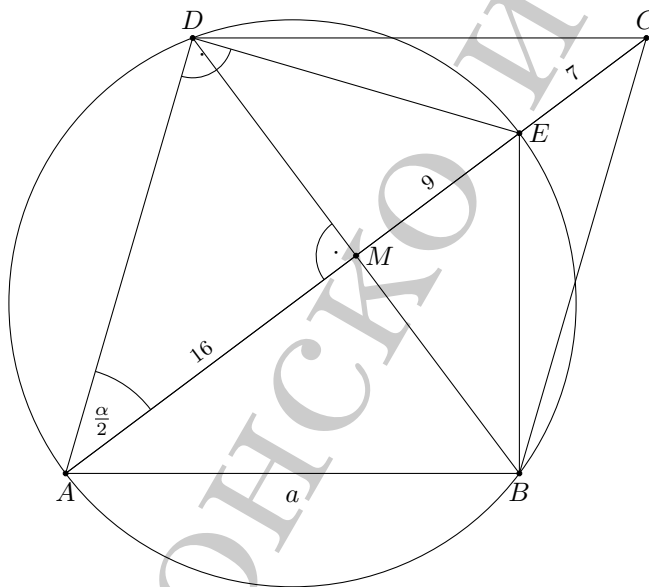
8. Нека је  $x$  сума новца за коју се могло купити 391 kg кафе прије поскупљења. Након поскупљења од 15%, 391 kg кафе може купити за  $115\%x = 1,15x$ .

Количину кафе  $k$  која се може купити за суму новца  $x$  након поскушљења израчунавамо из пропорције

$$391 : k = 1,15x : x.$$

Рјешавањем пропорције имамо да је  $391 \cdot x = k \cdot 1,15x$ , односно  $k = \frac{391x}{1,15x} = 340$ . Дакле, након поскушљења од 15% за исту суму новца се може купити 340 kg кафе.

9. Нека је  $M$  тачка пресјека дијагонала ромба  $ABCD$ , а  $E$  тачка пресјека дате кружнице и дуге дијагонале ромба. Са  $a$  означимо дужину странеце датог ромба и са  $\alpha$  угао ромба код тјемења  $A$  (Слика 30). Из услова задатка



Слика 30: Задатак 9.

имамо да дужина дужи  $AE$  износи 25 и дужина дужи  $EC$  износи 7. Закључујемо да је дужина веће дијагонале датог ромба  $d_1 = |AC| = 25 + 7 = 32$ . Познато је да се дијагонале ромба полове, одакле слиједи да је  $|AM| = \frac{32}{2} = 16$ .

Дужа дијагонала ромба  $AC$  полови угао  $\alpha$  код тјемења  $A$  одакле слиједи да је  $\angle DAE = \frac{\alpha}{2}$ . Такође, угао  $\angle MAD = \frac{\alpha}{2}$  јер су  $A, M$  и  $E$  колинеарне тачке.

Дијагонале ромба сијеку под правим углом, из чега добијамо  $\angle AMD = 90^\circ$ . Троугао  $ABD$  је једнакокраки ( $|AB| = |AD| = a$ ) па слиједи да центар кружнице описане око тог троугла лежи на висини која одговара страници  $BD$ . Та висина се поклапа са дужи  $AM$  јер је  $\angle AMD = \angle AMB = 90^\circ$ . Дакле, угао  $EDA$  је периферијски угао над пречником због чега је он прави угао. Закључујемо да су троуглови  $ADE$  и  $AMD$  слични, јер су им одговарајући углови једнаки.

Из сличности троуглова добијамо следећу пропорцију

$$\frac{|AD|}{|AM|} = \frac{|AE|}{|AD|},$$

односно  $\frac{a}{16} = \frac{25}{a}$ . Одакле је  $a = \sqrt{25 \cdot 16} = 4 \cdot 5 = 20$ . Дакле, дужина странице ромба је 20.

10. Користећи биномну формулу дати израз записујемо као

$$\left(\sqrt[6]{54} + \sqrt[3]{32}\right)^{2022} = \sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} \left(54^{\frac{1}{6}}\right)^k \cdot \left(32^{\frac{1}{3}}\right)^{2022-k}.$$

Како важи да је биномни коефицијент природан то је број

$$\binom{2022}{k} \left(54^{\frac{1}{6}}\right)^k \cdot \left(32^{\frac{1}{3}}\right)^{2022-k}$$

цијели број ако и само ако је  $\left(54^{\frac{1}{6}}\right)^k \cdot \left(32^{\frac{1}{3}}\right)^{2022-k}$  цијели број. Из овог записа

$$\left(54^{\frac{1}{6}}\right)^k \cdot \left(32^{\frac{1}{3}}\right)^{2022-k} = \left(3^3 \cdot 2\right)^{\frac{k}{6}} \cdot \left(2^5\right)^{\frac{2022-k}{3}} = 3^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{5 \cdot (2022-k)}{3} + \frac{k}{6}},$$

закључујемо да ће тај број бити цијели ако и само ако су експоненти  $\frac{k}{2}$  и  $\frac{5(2022-k)}{3} + \frac{k}{6}$  цјелобројни. Заиста, нека је  $\frac{l}{6} = \frac{5(2022-k)}{3} + \frac{k}{6}$ , за неки цијели број  $l$ . Принципи дјељења са остатком нам омогућава да бројеве  $k$  и  $l$  запишемо у облику  $k = 2m_k + k_1, k_1 \in \{0, 1\}$  и  $l = 6m_l + l_1, l_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Стога, ако је број  $3^{k/2} \cdot 2^{l/6} = M$  за неки цијели број  $M$ , тада је

$$2^{k_1/2} \cdot 3^{l_1/6} = \frac{M}{2^{m_k} \cdot 3^{m_l}} = \frac{p}{q},$$

при чему су  $p, q$  узајамно прости. Степеновањем претходне једнакости са 6 добијамо да је  $q^6 2^{3k_1} 3^{l_1} = p^6$ . Ако је  $k_1 \neq 0$  тада имамо да 2 дијели број на лијевој страни једнакости. Стога, број 2 мора да дијели број и на десној страни једнакости. Како је број 2 прост то имамо да  $2^6$  дијели  $p^6$ . Бројеви  $p$  и  $q$  су узајамно прости, што значи да број 2 не може да дијели  $q$ . Такође, бројеви 2 и 3 су узајамно прости, што значи да  $2^6$  дијели број  $2^{3k_1}$  из чега слиједи да  $3k_1 \geq 6$ , што није тачно. Закључујемо да  $k_1 = 0$ . На сличан начин закључујемо да  $l_1 = 0$ . Дакле, бројеви који се појављују на експонентима ( $k/2$  и  $l/6$ ) морају бити цијели бројеви, да би горе поменути производ био цијелобројан. Број  $\frac{k}{2}$  је цијели ако и само ако је  $k$  паран број. Такође, број

$$\frac{5(2022-k)}{3} + \frac{k}{6} = \frac{5 \cdot 2022}{3} - \frac{9k}{6} = 3370 - \frac{3k}{2},$$

је цијели ако и само ако је  $\frac{3k}{2}$  цијели, тј.  $k$  је паран број. Дакле, сабирак у суми

$$\sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} \left(54^{\frac{1}{6}}\right)^k \cdot \left(32^{\frac{1}{3}}\right)^{2022-k}$$

је цјелобројан ако и само ако је  $k$  паран. Како  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2022\}$ , то парних бројева у том скупу има 1012.

## Јул 2024.

## Задачи

1. Одредити вриједност израза

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy - y^2} + \frac{y^2}{x^2 - xy}$$

за  $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$ .

2. Ако је  $f(x + 1) = \frac{2x+3}{x}$ , одредити чему је једнако  $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ , за  $x \neq 0$  и  $x \neq 1$ .
3. Одредити број рјешења тригонометријске једначине

$$20 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 24 \sin x \cdot \cos x + 7 = 0$$

у интервалу  $[0, \pi]$ .

4. Ако је  $i$  имагинарна јединица, одредити збир реалног и имагинарног дијела комплексног броја  $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{2024}$ .
5. Одредити вриједност израза  $\log_2(\log_{\sqrt{2}} 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2)$ .
6. Нека је дат троугао са тјеменима  $A(-3, 0)$ ,  $B(2, 5)$  и  $C(3, 2)$ . Одредити дужину висине  $BD$  датог троугла.
7. Мјера оштрог угла ромба је  $60$  степени, а површина  $18\sqrt{3}$ . Наћи дужину мање дијагонале ромба.
8. Двије коцкице за игру се бацају једном. Одредити на колико начина збир добијених бодова по њиховом бацању може да износи  $5$  или  $6$ .
9. Кредит подигнут у банци је износио  $250\,000$  КМ са годишњом каматом од  $r$ . Отплаћен је за  $2$  године уплатама од  $150\,000$  КМ прве године и  $180\,000$  КМ друге године. Одредити вриједност  $r$ .
10. Дат је троцифрен природан број  $m$ . Може ли количник броја  $m$  и збира његових цифара да буде једнак  $83$ ? Образложити.

## Рјешења

1.

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy - y^2} + \frac{y^2}{x^2 - xy} \\
 &= \frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{x^2}{y(x - y)} + \frac{y^2}{x(x - y)} \\
 &= \frac{(x^2 + y^2)(x - y) - x^3 + y^3}{xy(x - y)} \\
 &= \frac{x^3 - x^2y + y^2x - y^3 - x^3 + y^3}{xy(x - y)} \\
 &= \frac{xy(y - x)}{xy(x - y)} = -1, x \neq 0, y \neq 0, x \neq y.
 \end{aligned}$$

2. Употребом смјене  $x + 1 = t$ , односно  $x = t - 1$ , једнакост  $f(x + 1) = \frac{2x+3}{x}$  се своди на  $f(t) = \frac{2t+1}{t-1}$ . Из тога даље слиједи да је

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2\frac{1}{1-x} + 1}{\frac{1}{1-x} - 1} = \frac{3-x}{x}, x \neq 0, x \neq 1.$$

3. Користећи формулу  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , дату једначину записујемо у облику

$$5 \sin^2 2x - 12 \sin 2x + 7 = 0.$$

Увођењем смјене  $\sin(2x) = t$  добијамо једначину  $5t^2 - 12t + 7 = 0$ , из које добијамо рјешења  $t_1 = 1$  и  $t_2 = \frac{7}{5}$ . Једначина  $\sin(2x) = 1$  у интервалу  $[0, \pi]$  има једно рјешење:  $x = \frac{\pi}{4}$ . Једначина  $\sin(2x) = \frac{7}{5}$  нема рјешење, јер  $\sin(2x) \in [-1, 1]$ . Дакле, број рјешења полазне једначине у датом интервалу је 1.

4. Записом датог комплексног броја у облику

$$\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{2024} = \left(\frac{(i-1)^2}{(i+1)^2}\right)^{1012} = \left(\frac{-2i}{2i}\right)^{1012} = (-1)^{1012} = 1,$$

добијамо да је његов реални дио једнак 1, а имагинарни дио једнак 0. Стога, збир реалног и имагинарног дијела датог броја је 1.

5. Користећи својства логаритамске функције

$$\log_a b^x = x \log_a b; \quad \log_{a^x} b = \frac{1}{x} \log_a b \quad \text{и} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

дати израз трансформишемо на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 \log_2 \left( \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^2 \cdot \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2 \right) &= \log_2 (2 \cdot 2 \cdot \log_2 3 \cdot 2 \cdot \log_3 2) \\
 &= \log_2 \left( 2^3 \cdot \log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3} \right) \\
 &= \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3.
 \end{aligned}$$

6. Права која пролази кроз тачке  $A$  и  $C$  има једначину  $y - 2 = (x - 3) \cdot \frac{0-2}{-3-3}$  тј.

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 3).$$

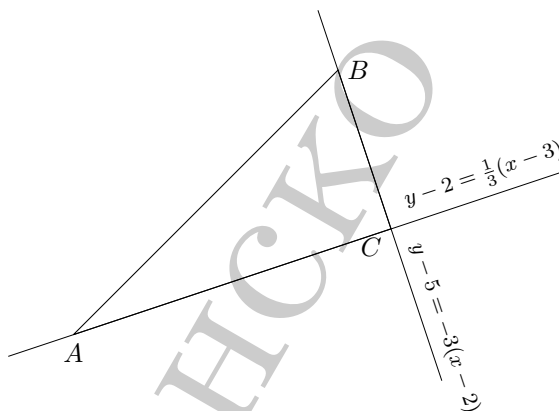
Коефицијент правца горе поменуте праве износи  $\frac{1}{3}$ . Права која је нормална на ту праву има коефицијент правца

$$k = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

Права која садржи тачке  $B$  и  $D$ , садржи висину троугла из тјемена  $B$ , па је нормална на дуж  $AC$ . Стога, закључујемо да је коефицијент правца праве која пролази кроз тачке  $B$  и  $D$  једнак  $-3$ . Како та права пролази кроз тачку  $B$ , то ће њена једначина бити

$$y - 5 = -3(x - 2).$$

Тачка  $D$  се налази на пресеку горе поменутих правих, па координате тачке



Слика 31: Задатак 6.

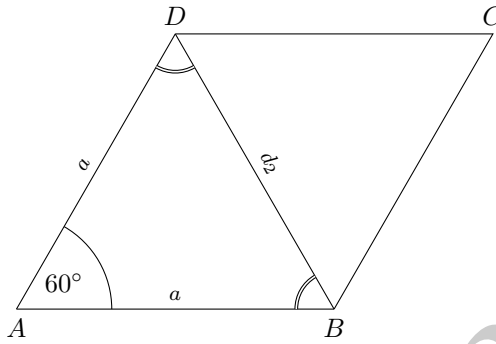
$D$  налазимо из система једначина:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(x - 3) + 2 \\ y &= -3(x - 2) + 5. \end{aligned}$$

Рјешавањем система једначина добијамо да је  $D(3, 2)$ . Дакле, дужина висине троугла  $ABC$  из тјемена  $B$  је једнака удаљености тачака  $B$  и  $D$ . Стога,

$$h_b = \sqrt{(2 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{10}.$$

7. Нека је дат ромб  $ABCD$  чија је дужина странице  $a$  и дужина краће дијагонале  $d_2$  и чија је мјера угла код тјемена  $A$  једнака  $60^\circ$ . Познато је да се наспрам једнаких страница у троуглу налазе једнаки углови. Како је ромб паралелограм са једнаким страницама то имамо да је  $|AD| = |AB| = a$ , па



Слика 32: Задатак 7.

због тога вриједи  $\angle DBA = \angle ADB$  (погледати слику 32). Збир углова у троуглу  $ABD$  је  $180^\circ$  из чега закључујемо да је  $\angle DBA + \angle ADB + 60^\circ = 180^\circ$ , из чега даље закључујемо да је  $\angle DBA = \angle ADB = 60^\circ$ . Дакле, троугао  $ABD$  је једнакостранични. Лако се уочава да је површина троугла  $ABD$  једнака половини површине ромба, тј. површина троугла  $ABD$  износи  $9\sqrt{3}$ . Из формуле за површину једнакостраничног троугла добијамо

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3},$$

одакле слиједи да је  $a = 6$ . Како је троугао  $ABD$  једнакостранични, то је  $d_2 = a = 6$ .

8. Приликом бацања коцке, број 5 се може добити на 4 начина:  $1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1$ . Исходи  $4 + 1$  и  $1 + 4$  су различити јер се у првом случају број 4 јавља на првој коцки, а у другом случају број 4 се јавља на другој коцки. Број 6 се може добити на 5 начина:  $1 + 5, 2 + 4, 3 + 3, 4 + 2, 5 + 1$ . Стога, укупан број начина да збир бројева буде 5 или 6 је 9.

9. Клијент у банци је подигао кредит од  $d_0 = 250\,000$  КМ. Након године дана његов дуг је износио  $d_0 + r \cdot d_0 = d_0(1 + r)$  КМ. Након уплате  $150\,000$  КМ његов дуг износи

$$d_1 = d_0(1 + r) - 150\,000.$$

Када протекне друга година, камата се рачуна на његов дуг који је имао на крају прве године, стога његово дуговање банци након друге године износи

$$d_1 + r \cdot d_1 = d_1(1 + r) = (d_0(1 + r) - 150\,000) \cdot (1 + r).$$

Из услова задатка закључујемо да након уплате од  $180\,000$  он у потпуности враћа свој дуг, што значи да је претходно написани израз једнак  $180\,000$  КМ. Дакле, имамо да вриједи

$$d_0(1 + r)^2 - 150\,000(1 + r) = 180\,000,$$

тј.  $25(1 + 2r + r^2) - 15(1 + r) = 18 \Leftrightarrow 25r^2 - 35r - 8 = 0$ . Рјешавањем претходне квадратне једначине добијамо да је  $r = -\frac{8}{5}$  или  $r = \frac{1}{5}$ . Како је  $r \geq 0$ , закључујемо да је  $r = 0,2$ , тј. камата је  $20\%$ .

10. Из услова задатка имамо да ако постоји такав број  $m = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ , да тада вриједи

$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 83,$$

тј.  $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = m = 83 \cdot (a + b + c)$ . Стога, закључујемо да број  $m$  мора да буде дјелив са 83. Како је он уједно и троцифрен, то број  $m$  мора да буде један од бројева из скупа

$$A = \{166, 249, 332, 415, 498, 581, 664, 747, 830, 913, 996\}.$$

Провјером услова за сваки од добијених бројева видимо да број са условима из текста задатка не постоји.

Згодно је примјетити да ако услов задатка запишемо у облику

$$100a + 10b - 82c = 83(a + b),$$

видимо да је број на лијевој страни једнакости паран, па број на десној страни једнакости мора да буде паран број. Дакле,  $a + b$  мора да буде паран. Стога, довољно је провјерити да ли услов задатка задовољавају само они бројеви из скупа  $A$  код којих је збир прве двије цифре паран, тј. 249, 332, 664, 913, 996, чиме се смањује број случајева које треба провјерити.

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ

## Септембар 2024.

## Задачи

1. Израчунати вриједност израза

$$\frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{y^2}{(x - y)^2} - \frac{2xy^2}{(x + y)(x - y)^2},$$

при чему је  $x \neq y, x \neq -y$ .

2. Одредити збир рјешења експоненцијалне једначине  $7^x - 8 + 7^{1-x} = 0$ .

3. Одредити број рјешења тригонометријске једначине

$$\sin x(2 \sin x - 1) + \cos 2x = 0$$

у интервалу  $[0, \pi]$ .

4. Одредити модуо комплексног броја

$$z = \frac{1 + i + i^{2024}}{1 - 2i + i^{2024}},$$

при чему је  $i$  имагинарна јединица.

5. Одредити вриједност реалног параметра  $p$  тако да права дата једначином  $(2p + 1)x + (3p - 5)y + 4p = 0$  буде паралелна са  $x$ -осом.

6. Одредити вриједност реалног параметра  $m$  тако да је збир квадрата рјешења квадратне једначине  $x^2 - x + m - 1 = 0$  једнак 8.

7. У правоуглом троуглу  $ABC$  мјера угла код тјемења  $C$  износи  $90^\circ$ , дужина катете  $BC$  износи 15 и тангенс угла код тјемења  $A$  је једнак 0,75. Наћи дужину катете  $AC$ .

8. На колико начина је збир добијених бројева, приликом бацања двије коцке за игру на срећу, једнак 4 или 5?

9. У понедељак су акције компаније порасле, а затим пале за исти проценат. Као резултат тога, у уторак су акције постале 4% јефтиније него на почетку трговања у понедељак. Колико је износио раст акција у понедељак?

10. Два радника, радећи заједно, могу обавити посао за 12 дана. За колико дана ће, радећи одвојено, први радник обавити тај посао, ако се зна да он за два дана обави исти дио посла који уради други радник за три дана?

## Рјешења

1.

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{y^2}{(x - y)^2} - \frac{2xy^2}{(x + y)(x - y)^2} \\
 &= \frac{(x - y)x^2 + y^2(x + y) - 2xy^2}{(x - y)^2(x + y)} \\
 &= \frac{x^3 - x^2y + xy^2 + y^3 - 2xy^2}{(x - y)^2(x + y)} \\
 &= \frac{x^3 - x^2y - xy^2 + y^3}{(x - y)^2(x + y)} \\
 &= \frac{(x - y)(x^2 - y^2)}{(x - y)^2(x + y)} \\
 &= \frac{(x - y)^2(x + y)}{(x - y)^2(x + y)} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

2. Једначина  $7^x - 8 + 7^{1-x} = 0$  еквивалентна је једначини

$$7^x - 8 + \frac{7}{7^x} = 0.$$

Множећи посматрану једначину са  $7^x$ , те уводећи смјену  $7^x = t$  ( $t > 0$ ) добијамо квадратну једначину по  $t$

$$t^2 - 8t + 7 = 0.$$

Посљедња једначина еквивалентна је једначини

$$(t - 7)(t - 1) = 0,$$

одакле добијамо да су рјешења те једначине  $t = 7$  и  $t = 1$ . Дакле, рјешења полазне једначине су  $x = 1$  и  $x = 0$ , па слиједи да је њихов збир једнак 1.

3. Једначина из задатка је еквивалентна једначини

$$2\sin^2 x - \sin x + \cos 2x = 0.$$

Користећи својство косинуса двоструког угла  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ , добијена једначина се трансформише у једначину

$$\sin^2 x - \sin x + \cos^2 x = 0.$$

Користећи основни тригонометријски идентитет, посљедња једначина се своди на

$$1 - \sin x = 0,$$

тј.  $\sin x = 1$ . Како нас интересују рјешења у интервалу  $[0, \pi]$ , то је само  $x = \frac{\pi}{2}$  рјешење полазне једначине.

4. Користећи својство да је  $i^{4k} = 1$ , при чему је  $i$  имагинарна јединица и  $k$  природан број, слиједи

$$z = \frac{1+i+1}{1-2i+1} = \frac{2+i}{2-2i} = \frac{2+i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{2+6i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i.$$

Како је модуо комплексног броја  $z = a + ib$  једнак  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , слиједи да је модуо комплексног броја  $z$  једнак

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

5. Једначина  $x$ -осе је  $y = 0$ , тј. коефицијент правца те праве је  $k = 0$ . Најприје одредимо експлицитни облик једначине праве коју посматрамо у задатку. Из  $(2p+1)x + (3p-5)y + 4p = 0$  слиједи да је експлицитни облик једначине те праве

$$y = \frac{-2p-1}{3p-5}x - \frac{4p}{3p-5}.$$

Двије праве су паралелне ако и само ако имају једнаке коефицијенте правца. Како треба да одредимо вриједност реалног параметра  $p$  тако да права буде паралелна са  $x$ -осом, заправо треба да ријешимо једначину

$$\frac{-2p-1}{3p-5} = 0,$$

одакле добијамо да је  $p = -\frac{1}{2}$ .

6. Нека су рјешења посматране квадратне једначине  $x_1$  и  $x_2$ . Користећи Вијетове формуле у квадратној једначини  $x^2 - x + m - 1 = 0$ , добијамо једнакости

$$x_1 x_2 = m - 1,$$

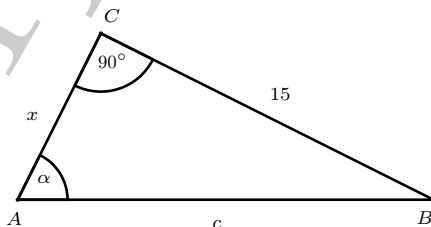
$$x_1 + x_2 = 1.$$

Из услова задатка је  $x_1^2 + x_2^2 = 8$ , тј.  $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 8$ . Уврштавањем вриједности добијених из Вијетових формула у последњу једнакост, добијамо једначину по  $m$

$$1 - 2m + 2 = 8,$$

одакле слиједи  $m = -\frac{5}{2}$ .

7. Нека је у правоуглом троуглу  $ABC$  (Слика 33) катета  $AC = x$ .



Слика 33: Задатак 7.

Из задатка је  $|BC| = 15$  и  $\operatorname{tg} \angle BAC = 0,75$ . Користећи дефиницију тангенса угла у правоуглом троуглу  $ABC$ , добијамо да је

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{x} = 0,75.$$

Слиједи да је  $|AC| = x = \frac{15}{0,75} = 20$ .

**8.** Приликом бацања 2 коцке, могућности да је збир добијених бројева једнак 4 су: 1 и 3, 2 и 2, 3 и 1, док су могућности да је збир добијених бројева једнак 5 слједеће: 1 и 4, 2 и 3, 3 и 2, 4 и 1. Дакле, укупно је 7 начина тако да збир добијених бројева буде једнак 4 или 5.

**9.** Означимо почетни износ акција са  $G_1$ , а проценат пораста акција у понедјељак са  $p$ . Након првог пораста, акције су износиле  $G_2 = G_1 + pG_1$ . Након пада за  $p$ , акције су износиле

$$G_3 = G_2 - pG_2 = G_1 + pG_1 - p(G_1 + pG_1) = G_1(1 - p^2).$$

Како су у уторак акције постале 4% јефтиније него на почетку трговања у понедјељак, то вриједи једнакост

$$G_1 - 0,04G_1 = G_1(1 - p^2),$$

одакле слиједи  $p^2 = 0,04$ , тј.  $p = 0,2$ . Дакле, раст акција у понедјељак је износио 20%.

**10.** Означимо са  $x$  број дана потребан првом раднику, а са  $y$  број дана потребан другом раднику да самостално ураде цијели посао. Слиједи да први радник за један дан сам уради  $\frac{1}{x}$  посла. Аналогно, други радник за један дан сам уради  $\frac{1}{y}$  посла. Радећи заједно, за један дан ураде  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  посла. Из услова задатка слиједи да је

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12},$$

тј.  $12x + 12y = xy$ . Како први радник, радећи сам, обави исти дио посла као други радник за 3 дана, то вриједи једнакост

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{y},$$

тј.

$$2y = 3x.$$

Уврштавајући добијену везу у једнакост  $12x + 12y = xy$ , добијамо једначину

$$60x = 3x^2.$$

Рјешења добијене једначине су  $x = 0$  или  $x = 20$ . Како је  $x > 0$ , слиједи да је број дана потребан првом раднику да сам уради посао једнак  $x = 20$ .

ЕЛЕКТРОНСКО ИЗДАЊЕ